前　言

在谢邦杰教授开创性工作的基础上，体上的矩阵理论十几年来已有了长足的进展。众所周知，矩阵方程是矩阵论中的重要研究方向之一，但由于体上一般元素乘法的非可换性，给问题的处理带来了相当大的困难，致使复矩阵论中的很多有效的基本方法与技巧难以仿效运用，复矩阵方程的常规解法在体上大都失效。体特别是任意体上矩阵方程方面的研究成果至今仍不多。而矩阵方程的研究除了理论上的重要意义外，还在数学、力学、理论物理、理论电工技术、遥感技术等各种领域中有广泛的应用，同时在国内外文献中，尚未见到系统而全面地论述矩阵方程方面的专著。本书力图弥补数学文献中的这一缺憾，以促进矩阵方程研究发展。

作者从 90 年代初开始研究体与环上的矩阵方程和矩阵方程组，已发表数十篇论文。本书大部分内容是作者研究成果的总结，主要运用近十几年来体上矩阵论的新成果为工具，研究各类矩阵方程和矩阵方程组有各种解的充要条件及其通解表达式。全书共四章，第一章介绍与矩阵方程研究有关的体与环上的线性代数，后三章分别介绍各类矩阵方程，后面还附有百余篇参考文献。

本书系山东省自然科学基金资助项目。

最后，趁本书出版之际，作者还要向我们的老师李师正教授多年来的谆谆教诲、指导、关心和帮助表示衷心的感谢！

限于水平，不当之处诚请读者批评指正。

作　者

1996 年春

符 号 表

符号	意义
□	证毕
F	域
Ω	任意的体
K	具有对合反自同构的体
Q	实四元数体
C	复数域
A'	矩阵 A 的转置
$\overline{A}$	矩阵 A 的共轭
A^*	矩阵 A 的共轭转置(即 $\overline{A}'$)
A^{-1}	矩阵 A 的逆
A^+	矩阵 A 的 Moore—Penrose 广义逆
$\mathrm{tr}A$	矩阵 A 的迹
$\mathrm{rank}A$	矩阵 A 的秩
$\mu(A)$	矩阵 A 的行向量张成的左向量空间
$R(A)$	矩阵 A 的列向量张成的右向量空间
$N(A)$	矩阵 A 的核
$\mathrm{Im}f$	f 的象(值域)
$\mathrm{Ker}f$	f 的核
$\dim V$	向量空间 V 的维数
$F^{m\times n}$	F 上的全体 $m\times n$ 矩阵
$F_r^{m\times n}$	F 上的全体秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵
$GL_n(F)$	F 上的全体 $n\times n$ 可逆阵
$SC_n(K)$	K 上的全体 $n\times n$ 自共轭矩阵
$SS_n(K)$	K 上的全体 $n\times n$ 反自共轭矩阵

$SP_n(P_n)$	Q 上的全体 $n\times n$ 亚半正定(正定)矩阵
$SP_n^*(P_n^*)$	Q 上的全体 $n\times n$ 亚半正定(正定)矩阵
A^*	矩阵 A 的次转置共轭矩阵
$H_n(K)$	K 上的全体 $n\times n$ 次自共轭矩阵
$S_n(K)$	K 上的全体 $n\times n$ 次反自共轭阵
$SP_n^{\triangle}(P_n^{\triangle})$	Q 上的全体 $n\times n$ 半正定(正定)次自共轭矩阵
$SP_n^{(*)}(P_n^{(*)})$	Q 上的全体 $n\times n$ 斜亚半正定(正定)矩阵
$A\geqslant O$	$A\in SP_n$
$A\trianglerighteq O$	$A\in SP_n^{\triangle}$
$\|q\|$	实四元数 q 的长度
$\mathrm{Re}[b]$	$b\in Q$ 的实部
A^{-*}	$(A^{-1})^*$
$A^{-(*)}$	$(A^{-1})^{(*)}$
$\det A$	A 的行列式
$T_{ij}(k)$	将一个矩阵的第 i 列(j 行)右(左)乘以 k 加到第 j 列(i 行)上去
$A_{\perp}^{n\times t}$	$\{V\in A^{n\times t}\|V^*V=I_t\}$
$\mathrm{Ch}R$	环 R 的特征
R_p	含幺交换环 R 在其素理想 P 处的局部化
R/M	环 R 对理想 M 的商环
$M^{\perp}$	M 的正交补
P_L	到 L 上的正交投影算子
$[t]$	实数 t 的整数部分
$A\sim B$	A 与 B 相似
$A\cong B$	A 与 B 等价(同构)
$L(V_n)$	F 上 n 维左(右)向量空间上的全体线性变换

$\Rightarrow$	推出
$\Leftrightarrow$	等价,当且仅当
$f\|s$	f 在 s 上的限制
$\\|A\\|$	矩阵 A 的 Frobenius 范数,实四元数矩阵 A 的范数
$A\otimes B$	A 与 B 的 Kronecer 积,实四元数阵 A 与 B 的弱直积
$\sigma(A)$	矩阵 A 的拉直、矩阵 A 的谱

目　录

第一章　体与环上的线性代数

域上的线性代数已是一门相当成熟的理论，早已成为数学专业的重要基础课之一．而体与环上的线性代数由于乘法的非交换性所限，五十年代以来进展甚微．自 1978 年谢邦杰先生的论文[1]发表以来，体上的线性代数已有了长足的发展．本章介绍在矩阵方程的研究中有重要理论和实用价值的一些内容，主要包括：体与环上的向量空间及其线性变换、体与环上的矩阵与线性方程组、(次)自共轭矩阵与(斜)亚(半)正定矩阵、环上矩阵的广义逆、体上矩阵的分解、四元数矩阵的范数及四元数矩阵的弱直积、弱圈积与拉直等．

§1　体与环上的向量空间及线性变换

设 R 是一个(结合)环，V 是一个加法交换群，若有从 $V\times R$ 到 V 的一个运算(叫做 V 的元素 μ 与 R 的元素 a 的纯量乘法，其积记为 μa)使得

1)　$(\mu+v)a=\mu a+va$；

2)　$\mu(a+b)=\mu a+\mu b$；

3)　$(\mu a)b=\mu(ab)$；

4)　当 R 有幺元 1 时，有 $\mu 1=\mu$；

则称 V 是 R 上的一个(右)向量空间．

例　任意体 Ω 可视为其任意子体 R 上的一个向量空间．更一般地，任意环恒可视为某子环上的向量空间．

设 V 是环 R 上的一个向量空间．V 的元素称为向量，R 的元素称为纯量；V 的零元素称为零向量，记为 θ，V 中 μ 的负元素 $-\mu$ 称为向量 μ 的负向量．

设 S 为 V 的一个非空子集，若在原有的向量加法与纯量乘法下，S 又是 R 上的一个向量空间，则说 S 是 V 的一个子空间．

以下恒设环 R 有幺元 1，于是与域上向量空间一样易证得下面的结论．

命题 1 V 的一个非空子集 S 为 V 的子空间的充要条件为

1) 若 $\mu,\upsilon\in S$，则 $\mu+\upsilon\in S$；

2) 若 $\mu\in S, a\in R$，则 $\mu a\in S$.

命题 2 $L(\mu_1,\cdots,\mu_m)=\{\sum_{i=1}^{m}u_ia_i\,|\,a_i\in R,\mu_i\in V,i=1,\cdots,m\}$ 是向量空间 V 的一个子空间．称为 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 所生成的子空间.

命题 3 V 的若干个子空间 S_i 的交 $S=\bigcap_i S_i$ 仍为 V 的一个子空间，称为交空间.

命题 4 若 $S_i(i=1,\cdots,m)$ 为 V 的子空间，则 V 中所有这样的向量 $\sum_{i=1}^{m}\mu_i(\mu_i\in S_i,i=1,\cdots,m)$ 构成 V 的一个子空间，称为 S_1，$\cdots$，S_m 的和空间. 记作 $\sum_{i=1}^{m}S_i$.

同域上向量空间一样，可定义环上（右）向量空间的同态、同构映射及向量的（右）线性组合．

如果 V 是由有限个向量 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 生成的，则说 V 是 R 上的有限维向量空间；若 V 中每个向量均可唯一地表为 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 的线性组合，则说向量组 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 是 V 的一个基，n 为 V 的维数. 并定义零空间 $\{\theta\}$ 的维数为 0.

如在环 R 上，所有的 n 元行向量 $(a_1,\cdots,a_n)$ 构成 R 上的一个 n 维向量空间 $R^{1\times n}$（简记 R^n）；向量组 $e_1=(1,0,\cdots,0)$，$e_2=(0,1,$

$\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,1)$(称之为标准单位向量)就是 R^n 的一个基．R 上任意 n 维空间显然同构于 R^n. 故 R 上任意两个 n 维向量空间同构．

下面恒设环 R 为一体，用 Ω 表示之．

同域上向量空间一样，可以定义 Ω 上向量空间 V 中向量的(右)线性相关性与(右)线性无关性，且可照样证明下面的

命题 5 $\mu_1,\cdots,\mu_m(m>1)$是线性相关的充要条件为其中有一个向量为其余向量的一个线性组合．

命题 6 若 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 线性无关，$\mu_1,\cdots,\mu_m,\alpha$ 线性相关，则 α 必可唯一地表为 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 的一个线性组合．

命题 7 Ω 上任意有限维向量空间 V 恒有一个唯一确定的维数 n，且当 $n\neq 0$ 时，V 中 n 个向量 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 构成 V 的一个基的充要条件为它们线性无关；Ω 上两个有限维向量空间同构的充要条件是其维数相等．

命题 8 若 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 是 Ω 上 n 维向量空间 V 的一个基，则 $\upsilon_1,\cdots,\upsilon_n$ 也是一个基的充要条件是有 Ω 上 n 阶非奇异阵 A 使

$$(\upsilon_1,\cdots,\upsilon_n)=(\mu_1,\cdots,\mu_n)A.$$

命题 9 当 $S=\sum_{i=1}^{m}S_i$ 时，下列各命题等价：

1) S 中每个向量 $\upsilon=\sum_{i=1}^{m}\upsilon_i(\upsilon_i\in S_i)$的表法唯一；

2) θ 在 S 中的表法唯一；

3) 诸子空间 S_i 的基合并起来便成 S 的基；

4) 诸 S_i 的维数的和即 S 的维数；

5) $(\sum_{i=1}^{s-1}S_i)\cap S_i=\{\theta\},i=2,\cdots,m$;

6) $(S_{i_1}+\cdots+S_{i_n})\cap(S_{i_{n+1}}+\cdots+S_{i_m})=\{\theta\}$，其中 $i_1,\cdots i_m$，是 $1,2,\cdots,m$ 的任意一个排列，$1\leqslant n<m$.

此时就定义 S 为诸 S_i 的直和，记为 $S=S_1\oplus S_2\oplus\cdots\oplus S_m$.

命题 10　对任意子空间 S 恒有子空间 S' 使 $V=S\oplus S'$，故 V 中任意一组线性无关的向量均可扩充为 V 的一个基.

（对有限维的 V 是显然的，对无限维的 V 可用 Zorn 引理来证）

下面给出重要的维数公式.

定理 1[2]　对任二有限维子空间 S_1 与 S_2，有

$$\dim(S_1+S_2)=\dim S_1+\dim S_2-\dim(S_1\cap S_2).$$

V 的一个变换 σ 若满足：

1)　$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\alpha,\beta\in V$;

2)　$\sigma(\kappa\alpha)=\sigma(\alpha)\kappa.\ \kappa\in\Omega,\alpha\in V$,

则称为 V 上的一个线性变换.

同域上向量空间的情形一样，在定义变换的运算后，照样可证

命题 11　V 上的全体线性变换构成一个有幺元（恒等变换）的环（称为 V 的线性变换环）；其中所有可逆线性变换又构成一个乘法群（叫做 V 的可逆线性变换群）.

定理 2　Ω 上 n 维向量空间 V 的线性变换环反同构于 Ω 上 n 阶全阵环；V 的可逆线性变换群反同构于 Ω 上 n 阶完全线性群.

定理 3　Ω 上 n 维向量空间 V 的一个固定线性变换在不同基下对应的矩阵是彼此相似的.

定理 4[4]　如果 $f:V\to V'$ 是 Ω 上向量空间之间的线性映射，则存在 V 的一组基 X，使得 $X\cap\mathrm{Ker}f$ 是 $\mathrm{Ker}f$ 的一个基，并且

$$\{f(x)\mid f(x)\neq0,x\in X\}$$

是 $\mathrm{Im}f$ 的一组基. 特别地，

$$\dim V=\dim(\mathrm{Ker}f)+\dim(\mathrm{Im}f).$$

以上事实与域上向量空间基本相同，但应注意由于环与体上的乘法未必可交换，故在定义向量空间时有左与右之分，即对称地还可定义环与体上的左向量空间，纯量就应置于向量之左而进行

纯量乘法．

环 R 上的左(右)向量空间又常称为 R 左(右)模，它是研究环的结构理论与表示理论的一个基本工具，在同调代数中也如此．

下面引入广义酉空间的概念．

本书恒令 Q 是一个实四元数体．对于 $c\in Q$，$\bar{c}$ 表示 c 的共轭四元数．显然，对于 $p,q\in Q$，有 $\overline{pq}=\bar{p}\bar{q}$，$\overline{p+q}=\bar{p}+\bar{q}$.

定义 1　设 V 是 Q 上的一个右向量空间．若对 V 中的任二向量 u,v 恒有 Q 中唯一的四元数与之对应，称为 u 与 v 的内积，记为 $\langle u,v\rangle$，如果

(1)　$\langle u_1a+u_2b,v\rangle=\bar{a}\langle u_1,v\rangle+\bar{b}\langle u_2,v\rangle$；

(2)　$\langle u,v\rangle=\overline{\langle u,v\rangle}$；

(3)　$\langle u,u\rangle\geqslant 0$，当且仅当 $u=\theta$ 时等号成立；

其中 $u,v,u_1,u_2\in V,a,b\in Q$.

带有内积的 V 称为一个广义酉空间．

例　在 Q 上所有 $m\times n$ 矩阵构成的右向量空间 $Q^{m\times n}$ 中，规定内积

$$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}A^{*}B, \tag{1}$$

易检知，$Q^{m\times n}$ 关于(1)构成一个广义酉定间.

定义 2　Q 是一个广义酉空间，$u\in Q$，称非负实数 $\langle u,u\rangle^{\frac{1}{2}}$ 为向量 u 的范数，记为 $\|u\|$．

易证得下面的命题

命题 12　在广义酉空间中，有以下关系式：

(1)　$\langle ua,vb\rangle=\bar{a}\langle u,v\rangle b$；

(2)　$\langle u,v_1a+v_2b\rangle=\langle u,v_1\rangle a+\langle u,v_2\rangle b$；

(3)　$\left(\sum\limits_{i=1}^{m}u_ia_i,\sum\limits_{j=1}^{n}v_jb_j\right)=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\bar{a}_i\langle u_i,v_j\rangle b_j$.

命题 13　$\|ua\|=|a|\,\|u\|$．

命题 14　$\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2+2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle$.

命题 15　对于广义酉空间 V 中任二向量 u,v 恒有

$$|\langle u,v\rangle|\leqslant\|u\|\ \|v\|,$$

等号成立当且仅当 u,v 右线性相关．

命题 16　$\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$．

§2　体与环上的矩阵与线性方程组

本节研究体、主理想环（未必交换）、单 Artinian 环中矩阵的秩，含幺环上矩阵的初等变换，体、主理想环、单 Artinian 环上矩阵的等价标准形及体上线性方程组可解的充要条件．

定义 1　含幺环 R 上一个 $m\times n$ 矩阵 A 的行空间（或列空间）是由 A 的诸行（或诸列，分别视为 R^n 与 R^m 中的元素）所生成的自由左（或右）模 R^n（或 R^m）的子模．如果 R 是体，则 A 的行空间（或列空间）的维数称为 A 的行（或列）秩．

可以证明，若 $A\in\Omega^{m\times n}$，则 A 的行秩等于 A 的列秩．

定义 2　$A\in\Omega^{m\times n}$，称 A 的行秩为 A 的秩，记为 $\mathrm{rank}A$．

定义 3　设 R 为含幺环，$A,B\in R^{n\times n}$ 称为相似的，若有 $P\in GL_n(R)$ 使 $B=PAP^{-1}$，记为 $A\sim B$．$C,D\in R^{n\times m}$ 称为等价的，记为 $C\cong D$，如果存在 $P,T\in GL_n(R)$ 使 $D=PCT$．

等价和相似均是等价关系．

定义 4　设 A 是含幺环 R 上的矩阵．下列诸项均叫作 A 上的初等行变换：

(1)　交换 A 的两行；

(2)　将 A 的一行左乘以单位 $c\in R$；

(3)　对于 $r\in R,i\neq j$，将第 j 行左乘以 r 加到第 i 行上．

类似地可定义 A 上的初等列变换（(2)与(3)中的左乘均改成右乘）．

将单位矩阵 I_n 恰好进行一次初等行（或列）变换所得的矩阵

叫作 $n\times n$ 的初等矩阵.

定理 1[2] 设 A 是含幺环 R 上的 $n\times m$ 矩阵. E_n(或 E_m)是 I_n(或 I_m)上进行初等行(或列)变换 T 而得到的初等矩阵,则 E_nA(或 AE_m)是 A 上作用 T 而得到的矩阵.

由此,含幺环 R 上的初等阵均可逆,且其逆也是初等阵.

定理 2[2] 关于体 Ω 上 $n\times n$ 矩阵 A 的以下诸条件是彼此等价的.

(1) $\operatorname{rank}A=n$;

(2) A 等价于单位阵 I_n;

(3) $A\in GL_n(\Omega)$;

(4) A 是一些初等阵的乘积.

定理 3[4] $A\in\Omega^{m\times n}$,则 $\operatorname{rank}A=r$ 的充要条件为有 $P\in GL_m(\Omega)$ 和 $T\in GL_n(\Omega)$,使

$$PAT=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

定理 4[2] 设 R 是一个主理想环,$A\in R_r^{m\times n}$,$r>0$,则 A 等价于标准形

$$\operatorname{diag}(d_1,\cdots,d_r,0,\cdots,0),$$

其中 $d_i\neq 0,i=1,\cdots,r,d_i\mid d_j,1\leqslant i<j\leqslant r$.

注 若 R 是欧氏环,则上述的 A 可通过一些初等行变换或初等列变换化为标准形.

定理 5[2] 单 Artinian 环同构于某一个体上的 $n\times n$ 全阵环.

定理 6[3] R 为单 Artinian 环,$A\in R^{m\times n}$,则 A 等价于

$$\operatorname{diag}(1,\cdots,1,e,0,\cdots,0)$$

其中 $e^2=e$.

下面引入含幺结合环上的矩阵广义{1}逆.

定义 5 设 R 是一个含幺结合环,$A\in R^{m\times n}$,若有 $X\in R^{n\times m}$,使 $AXA=A$,则称 X 为 A 的广义{1}逆,记为 $A^{(1)}$.

定理 7 设 R 是一个含幺结合环，$A\in R^{m\times n}$，且

$$A=P\mathrm{diag}(D,O)T, D^2=D,$$

P,T 可逆，则 $A^{(1)}$ 一定存在 .

由定理 7 立知，体及单 Artinian 环上的矩阵均存在广义{1}逆.

下面给出体上矩阵秩的一些等式与不等式.

定理 8[1] 设 P 和 T 是 Ω 上的可逆阵，对 Ω 上的任意矩阵 A，只要可乘，就有

$$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}PA=\mathrm{rank}AQ=\mathrm{rank}PAQ.$$

定理 9[1] （Sylvester **定律**） $A\in\Omega^{m\times n}, B\in\Omega^{n\times s}$，则

$$\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B-n\leqslant\mathrm{rank}AB\leqslant\min\{\mathrm{rank}A,\mathrm{rank}B\}.$$

定理 10[1] 对于 Ω 上的矩阵，A,B,C，只要可乘，就有

$$\mathrm{rank}ABC\geqslant\mathrm{rank}AB+\mathrm{rank}BC-\mathrm{rank}B.$$

以下恒令 $\mu(A)$ 与 $R(A)$ 分别是 Ω 上的矩阵 A 的行向量与列向量张成的左向量空间与右向量空间.

引理 1 设 $A\in\Omega^{m\times n}, B\in\Omega^{m\times t}, C\in\Omega^{s\times n}$，则

$$R(A)\cap R(I-AA^{(1)})B)=\{\theta\}; \tag{1}$$

$$\mu(A)\cap\mu(C(I-A^{(1)}A))=\{\theta\}. \tag{2}$$

证明 设 $\alpha\in R(A)\cap R((I-AA^{(1)})B)$，则有向量 x_1 与 x_2 使得

$$\alpha=Ax_1=(I-AA^{(1)})Bx_2.$$

因 $I-AA^{(1)}$ 是幂等阵，故

$$(I-AA^{(1)})\alpha=(I-AA^{(1)})Ax_1=(I-AA^{(1)})^2Bx_2$$
$$=(I-AA^{(1)})Bx_2=\alpha.$$

由 $AA^{(1)}A=A$ 得

$$(I-AA^{(1)})Ax_1=\theta,$$

故 $\alpha=\theta$.

同理可证(2).

引理 2 设 $A\in\Omega^{m\times s}, B\in\Omega^{m\times t}, C\in\Omega^{l\times n}, D\in\Omega^{k\times n}$，则有

(i) $\mathrm{rank}(A,B)=\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B\Leftrightarrow R(A)\cap R(B)=\{\theta\}$；

(ii) $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}=\mathrm{rank}C+\mathrm{rank}D\Leftrightarrow\mu(C)\cap\mu(D)=\{\theta\}$.

证明 由

$$R(A,B)=R(A)+R(B),\mu\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}=\mu(C)+\mu(D)$$

及维数公式立得(*i*)与(*ii*).

定理 11 设 $A\in\Omega^{m\times n}, B\in\Omega^{s\times t}, C\in\Omega^{s\times n}, D\in\Omega^{m\times t}$，则

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A & D\\C & B\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}\begin{pmatrix}O & (I-AA^{(1)})D\\C(I-A^{(1)}A) & B-CA^{(1)}D\end{pmatrix}\tag{3}$$

$$=\mathrm{rank}B+\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A-DB^{(1)}C & D(I-B^{(1)}B)\\(I-BB^{(1)})C & O\end{pmatrix}\tag{4}$$

$$=\mathrm{rank}C+\mathrm{rank}\begin{pmatrix}(I-CC^{(1)})B & O\\D-AC^{(1)}B & A(I-C^{(1)}C)\end{pmatrix}\tag{5}$$

$$=\mathrm{rank}D+\mathrm{rank}\begin{pmatrix}B(I-D^{(1)}D) & C-BD^{(1)}A\\O & (I-DD^{(1)})A\end{pmatrix}\tag{6}$$

证明 设

$$E=(I-AA^{(1)})D,\tag{7}$$

$$F=C(I-A^{(1)}A),\tag{8}$$

$$G=B-CA^{(1)}D.\tag{9}$$

因

$$\begin{pmatrix}I & O\\-CA^{(1)} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & D\\C & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -A^{(1)}D\\O & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & E\\F & G\end{pmatrix}$$

故由定理 8 知，

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & E \\ F & G \end{pmatrix}. \tag{10}$$

由引理 1 知，

$$R(A) \cap R(E) = \{\theta\}, \mu(A) \cap \mu(F) = \{\theta\}.$$

下证

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & E \\ F & G \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix} + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & E \\ F & G \end{pmatrix}$$

设

$$\alpha \in R(\begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}) \cap R(\begin{bmatrix} O & E \\ F & G \end{bmatrix}),$$

则有向量$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$及$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$使

$$\alpha = \begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & E \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

故

$$Ax_1 = Ey_2.$$

从而，

$$Ax_1 \in R(E), Ey_2 \in R(A).$$

由于

$$Ax_1 \in R(E) \cap R(A) = \{\theta\},$$

故 $\alpha = \theta$. 此示，

$$R(\begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix}) \cap R(\begin{pmatrix} O & E \\ F & G \end{pmatrix}) = \{\theta\}.$$

利用引理 2，得

$$\operatorname{rank}\left(\begin{array}{cc:cc} A & O & O & E \\ O & O & F & G \end{array}\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix} + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & E \\ F & G \end{pmatrix},$$

即，

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O & E \\ O & F & G \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & E \\ F & G \end{pmatrix}. \tag{11}$$

由定理 8,得

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O & E \\ O & F & G \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O & E \\ O & F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I & O \\ O & I & O \\ O & O & I \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & A & E \\ O & F & G \end{pmatrix}; \tag{12}$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & A \\ O & F \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & A \\ O & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -I \\ O & I \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & F \end{pmatrix} = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}F.$$

因 $\mu(A)\cap\mu(F)=\{\theta\}$,故由引理 2 知,

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & A \\ O & F \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ F \end{pmatrix}.$$

显然,

$$R(\begin{bmatrix} A \\ F \end{bmatrix}) \subseteq R(\begin{bmatrix} A & A \\ O & F \end{bmatrix}).$$

故

$$R(\begin{bmatrix} A \\ F \end{bmatrix}) = R(\begin{bmatrix} A & A \\ O & F \end{bmatrix}).$$

从而,

$$R(\begin{bmatrix} A & A & E \\ O & F & G \end{bmatrix}) = R(\begin{bmatrix} A & A \\ O & F \end{bmatrix}) + R(\begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix})$$

$$= R(\begin{bmatrix} A \\ F \end{bmatrix}) + R(\begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix})$$

$$= R(\begin{bmatrix} A & E \\ F & G \end{bmatrix}).$$

此示,

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & A & E \\ O & F & G \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & E \\ F & G \end{pmatrix}.$$

故由(11)与(12)可得(3).

同理可证(4)、(5)及(6)式.□

推论 1　设 A,B,C,D 同定理 11 所述，则

1) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(B,C(I-A^{(1)}A))$

$$=\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ (I-BB^{(1)})C \end{pmatrix};$$

2) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & D \\ O & B \end{pmatrix}=\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}(A,D(I-B^{(1)}B))$

$$=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}\begin{pmatrix} (I-AA^{(1)})D \\ B \end{pmatrix};$$

3) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & D \\ C & O \end{pmatrix}=\operatorname{rank}C+\operatorname{rank}(D,A(I-C^{(1)}C))$

$$=\operatorname{rank}D+\operatorname{rank}\begin{pmatrix} C \\ (I-DD^{(1)})A \end{pmatrix};$$

4) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & D \\ C & B \end{pmatrix}=\operatorname{rank}D+\operatorname{rank}(C-B(I-D^{(1)}D))$

$$=\operatorname{rank}C+\operatorname{rank}\begin{pmatrix} (I-CC^{(1)})B \\ D \end{pmatrix};$$

5) $\operatorname{rank}(A,D)=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(I-AA^{(1)}D)$

$$=\operatorname{rank}D+\operatorname{rank}(I-DD^{(1)})A;$$

6) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}C(I-A^{(1)}A)$

$$=\operatorname{rank}C+\operatorname{rank}A(I-C^{(1)}C).$$

推论 2　设 $A\in\Omega^{m\times n},B\in\Omega^{n\times s}$，则

$$\operatorname{rank}AB=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(B,I-A^{(1)}A)-n$$
$$=\operatorname{rank}B+\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A \\ I-BB^{(1)} \end{pmatrix}-n\quad.$$

证明　由定理 8，得

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & A \\ B & I \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I & -A \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & O \\ -B & I \end{pmatrix} = \operatorname{rank}AB + n.$$

由 4)，

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & A \\ B & I \end{pmatrix} = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}(B, I - A^{(1)}A) = \operatorname{rank}B + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I - BB^{(1)} \\ A \end{pmatrix}.$$

从而推论 2 得证．□

定理 12 设 $A \in \Omega^{m\times n}, B \in \Omega^{s\times t}, C \in \Omega^{s\times n}, D \in \Omega^{m\times t}$，$E, F$ 及 G 的定义同(7)、(8)及(9)，则

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}E + \operatorname{rank}(F, G(I - E^{(1)}E)) \quad (13)$$

$$= \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}E + \operatorname{rank}G(I - E^{(1)}E) + \operatorname{rank}(I - G(I - E^{(1)}E)(G(I - E^{(1)}E))^{(1)}F \quad (14)$$

$$= \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}E + \operatorname{rank}F + \operatorname{rank}(I - FF^{(1)})G(I - E^{(1)}E). \quad (15)$$

证明 由(3)，推论 1 中的 4)及 5)，得

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & D \\ C & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}\begin{pmatrix} O & E \\ F & G \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}(O, E) + \operatorname{rank}(F, G)(I - (O, E)^{(1)}(O, E))$$

$$= \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}E + \operatorname{rank}(F, G)\begin{pmatrix} I & O \\ O & I - E^{(1)}E \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}E + \operatorname{rank}(F, G(I - E^{(1)}E))$$

$$= \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}E + \operatorname{rank}G(I - E^{(1)}E) + \operatorname{rank}(I - G(I - E^{(1)}E)(G(I - E^{(1)}E))^{(1)})F$$

$$= \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}E + \operatorname{rank}F + \operatorname{rank}(I - FF^{(1)})G(I - E^{(1)}E).$$ □

推论 3 设 A, B 及 C 同定理 12 所述，则

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B + \operatorname{rank}(I - BB^{(1)})C(I - A^{(1)}A).$$

下面引进单 Artinian 环上矩阵秩的定义．

由定理 5 知，单 Artinian 环 R 与一个体 Ω 上的全矩阵环 $\Omega^{s\times s}$ 同构. 令 $a\to(a)_\Omega$ 是 R 到 $\Omega^{s\times s}$的一个同构映射．设 $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$，定义 A 的 Ω 表示 A_Ω 如下

$$A_\Omega = ((a_{ij})_\Omega) \in \Omega^{sm\times sn}.$$

显然，若 $A,B\in R^{m\times n}, D\in R^{n\times r}$，则

$$(A+B)_\Omega = A_\Omega + B_\Omega,$$

$$(AD)_\Omega = A_\Omega D_\Omega,$$

$$(A^{(1)})_\Omega = (A_\Omega)^{(1)}$$

定义 6　设 $A\in R^{m\times n}$，且单 Artinian 环 R 与体上的全矩阵环 $\Omega^{s\times s}$同构，则称$\frac{1}{s}\operatorname{rank}A_\Omega$ 为 A 的秩．

显然，A 的秩是一个非负分数. 前面所述的关于体上矩阵秩的性质可以扩展到 R 上的矩阵.

下面给出主理想环 R(未必交换)上矩阵秩的定义.

定义 7　设 $A\in R^{m\times n}$，A 中最大的非零因子的子方块的阶数叫做 A 的秩. 当 $A=O$ 时，规定其秩为 0. A 的秩记为 $\operatorname{Rank}A$.

当 R 与体 Ω 相联系时，总认为 Ω 是 R 所嵌入的商除环. 如果 R 上的矩阵的广义{1}逆存在，上述体上矩阵秩的有关定理可扩展到 R 上，在此不再赘述．

下面，我们介绍体上线性方程组的可解条件. 至于其解法是今后所述矩阵方程 $AX=B$ 及 $XA=B$ 解法的特例．

考虑任意体 Ω 上的右线性方程组 $AX=b$.

定理 13　$AX=b$ 有解$\Leftrightarrow\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(A,b)$.

证明　设 $\operatorname{rank}A=r$，则有可逆阵 P,Q 使

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

令

$$Q^{-1}X=Y, Pb=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^r,$$

则有

$$\operatorname{rank}(A,b)=\operatorname{rank}P(A,b)\begin{pmatrix} Q & O \\ O & 1 \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_r & O & b_1 \\ O & O & b_2 \end{pmatrix}.$$

故

$AX=b$ 有解$\Leftrightarrow PAQ\,Q^{-1}X=Pb$ 有解$\Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$有解$\Leftrightarrow b_2=0\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A,b)=r=\operatorname{rank}A$. □

定理 14 设 $A\in\Omega_r^{m\times n}(r<n)$，则齐次右线性方程组

$$AX=O \tag{16}$$

的解空间的维数为 $n-r$. 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$为(16)的解向量组，且 $\operatorname{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})=n-r$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}$必为(16)的一个基础解系.

仿上可给出 Ω 上左线性方程组的可解条件.

最后我们引入左、右高矩阵的定义.

定义 8 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，若 $Ax=O$ 只有零解，则称 A 为右高矩阵；若 $xA=O$ 只有零解，则称 A 为左高矩阵.

§3 (次)自共轭矩阵与(斜)亚(半)正定阵

以下恒令 K 是一个具有对合反自同构的体，A^* 表示矩阵 A 的共轭转置.

本节介绍 K 上的自共轭矩阵与次自共轭矩阵，实 四元数体 Q 上的亚(半)正定阵及斜亚(半)正定矩阵.

定义 1 设 $A\in K^{n\times n}$，若 $A^*=A$，$(A^*=-A)$，则称 A 为自共轭矩阵(反自共轭阵).

K 上的全体 n 阶(反)自共轭阵用 $SC_n(K)(SS_n(K))$表示.

命题 1 $P\in GL_n(K)$，$A\in K^{n\times n}$，则

$$A\in SC_n(K)\Leftrightarrow PAP^*\in SC_n(K).$$

命题 2 $A\in SC_n(Q)$，则存在广义酉矩阵 $U(U^*U=I)$ 使得 UAU^* 为实对角矩阵．

命题 3 $A\in R^{n\times n}$，则 A 可唯一地分解为

$$A=H(A)+S(A),$$

其中，

$$H(A)=\frac{1}{2}(A+A^*),S(A)=\frac{1}{2}(A-A^*).$$

易知，$H(A)\in SC_n(Q)$，$S(A)$ 为反自共轭阵．

定义 2 $A\in SC_n(Q)$ 称为半正定（正定）自共轭矩阵，如果对任意的非零向量 $x\in Q^{1\times n}$ 使 $xAx^*\geqslant 0(>0)$

$SP_n(P_n)$ 表示 Q 上的全体 n 阶半正定（正定）自共轭阵；$A\geqslant 0$ (>0) 表示 $A\in SP_n(P_n)$；$A\geqslant B\Leftrightarrow A-B\geqslant O$.

定理 1[4] 下列诸命题等价：

(1) A 为一个正定的自共轭矩阵；

(2) $A=PP^*$，其中 P 为可逆阵；

(3) A 为自共轭矩阵且其特征根均为正数；

(4) TAT^* 为一个正定自共轭阵，T 可逆．

定理 2[4] 下列诸命题等价：

(1) A 为半正定自共轭矩阵；

(2) $P^*AP=\mathrm{diag}(I_r,O)$，$r=\mathrm{rank}A$，$P$ 可逆；

(3) $A=SS^*$，S 为 Q 上的矩阵；

(4) A 为自共轭矩阵且其特征根恒 $\geqslant 0$；

(5) A 为自共轭矩阵且其主子式恒 $\geqslant 0$；

(6) TAT^* 为半正定自共轭，T 可逆．

定理 3[5] 若 $\begin{pmatrix} B_1 & B_2^* \\ B_2 & B_3 \end{pmatrix}\geqslant O$，则

(1) B_1,B_3 皆为半正定自共轭阵；

(2) $\operatorname{rank}(B_2, B_3)=\operatorname{rank}B_3$ 且 $B_3X=B_2$ 有解；

(3) $\operatorname{rank}(B_1, B_2^*)=\operatorname{rank}B_1$ 且 $B_1X^*=B_2^*$ 有解．

定理 4 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}^* \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \in SC_n(Q)$,
$$\begin{matrix} n_1 & n_2 \end{matrix}$$

则 $A\in SP_n$ 的充要条件为

(1) $\operatorname{rank}(A_{11}, A_{12}^*)=\operatorname{rank}A_{11}$；

(2) A_{11} 与 $A_{22}-UA_{11}U^*$ 均为半正定自共轭矩阵，其中 U 为矩阵方程 $XA_{11}=A_{12}$ 的任一解．

证明 若 $A\in SP_n$，则由定理 3 知(1)成立且矩阵方程 $XA_{11}=A_{12}$ 有解．设 U 为其一解，且

$$P=\begin{pmatrix} I_{n_1} & -U^* \\ O & I_{n_2} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

则 $A\in GL_n(Q)$ 且

$$P^*AP=\operatorname{diag}(A_{11}, A_{22}-UA_{11}U^*)\in SP_n.$$

故 A_{11} 与 $A_{22}-UA_{11}U^*$ 均为半正定自共轭矩阵．

反之，由 $\operatorname{rank}(A_{11}, A_{12}^*)=\operatorname{rank}A_{11}$ 知矩阵方程 $XA_{11}=A_{12}$ 有解．设 U 为其一解且 P 如(1)式，则 $P\in GL_n(Q)$ 且

$$P^*AP=\operatorname{diag}(A_{11}, A_{22}-UA_{11}U^*).$$

由于 $A_{11}, A_{22}-UA_{11}U^*$ 均为半正定自共轭阵，故 $P^*AP\in SP_n$. 从而 $A\in SP_n$. □

定理 5 设 $A, B\in SP_n$，则有 $P\in GL_n(Q)$ 使 P^*AP 与 P^*BP 皆为实对角阵．

证明 令 $\operatorname{rank}(A+B)=r$，则有 $P_0\in GL_n(Q)$ 使

$$P_0^*(A+B)P_0=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

记
$$P_0^* BP=\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12}^* \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix},$$
$$\quad n \quad n-r$$

则由定理 3 知，$M_{11}\in SP_r$ 且 $M_{22}\in SP_{n-r}$，
$$\mathrm{rank}(M_{11},M_{22})=\mathrm{rank}M_{22}. \tag{2}$$
因
$$P_0^*(A+B)P_0\geqslant P_0^* BP_0,$$
故对
$$\theta\neq x=\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_{n-r} \end{pmatrix}\in Q^{n\times 1},$$
有
$$(0,\varepsilon_{n-r}^*)\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_{n-r} \end{pmatrix}\geqslant(0,\varepsilon_{n-r}^*)\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12}^* \\ M_{12} & M_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_{n-r} \end{pmatrix}.$$
从而，
$$0\geqslant\varepsilon_{n-r}^* M_{22}\varepsilon_{n-r}.$$
因 $M_{22}\in SP_{n-r}$，故 $M_{22}=O$. 又由(2)知，$M_{12}=O$，于是，
$$P^* BP_0=\begin{pmatrix} M_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$
由于 $M_{11}\in SP_r$，故由命题 2 知，有广义酉矩阵 U，使
$$U^* M_{11}U=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)$$
其中，$\lambda_i\geqslant 0,i=1,\cdots,r$. 令
$$P=P_0\mathrm{diag}(U,I_{n-r}),$$
则
$$P^* BP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0), \tag{3}$$
$$P^* AP=\mathrm{diag}(1-\lambda_1,\cdots,1-\lambda_r,0,\cdots,0). \ \square \tag{4}$$

定理 6 设 $A,B\in SP_n$，则
$$A(A+B)^{(1)}B=B(A+B)^{(1)}A. \tag{5}$$

证明 由定理 5 知，有 $P\in GL_n(Q)$ 使(3)与(4)式成立．故可取

$$(A+B)^{(1)}=P\text{diag}(I_r,O)P^*.$$

易验知(5)成立．□

定理 7 设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & X_{13} \\ A_{12}^* & A_{22} & A_{23} \\ X_{13}^* & A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ n-r_1-r_2 \end{matrix} \in SC_n,$$

$$r_1 \quad r_2 \quad n-r_1-r_2$$

则存在 $X_{13}\in Q^{r_1\times(n-r_1-r_2)}$ 使 $A\in SP_n(P_n)$ 的充要条件为

$$A_1=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}\geqslant O,(>O),A_2=\begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix}\geqslant O(>O).$$

证明 必要性由定理 3 立得．下证充分性．

若

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}\geqslant O,\begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix}\geqslant O,$$

则由定理 4 可设 U_1 和 U_2 分别为矩阵方程

$A_{22}X=A_{12}^*$ 和 $A_{33}X=A_{23}^*$ 的任一解．取 $X_{13}=U_1^*A_{23}$ 且

$$P=\begin{pmatrix} I_{r_1} & O & O \\ -U_1 & I_{r_2} & O \\ O & -U_2 & I_{n-r_1-r_2} \end{pmatrix},$$

则 $P\in GL_n(Q)$，且

$$P^*AP=\text{diag}(A_{11}-U_1^*A_{22}U_1,A_{22}-U_2^*A_{33}^*U_2,A_{33}).$$

由定理 4 及定理 2 知，$A\in SP_n$. 而 $A\in P_n\Leftrightarrow A_1>O$ 与 $A_2>O$ 可类似证明．□

定义 3 设 $A\in Q^{n\times n}$，若对任意的非零向量 $x\in Q^{n\times 1}$ 有

$$\text{Re}[x^*Ax]>0,(\geqslant 0),$$

则称 A 为亚(半)正定矩阵.

全体 n 阶亚(半)正定阵记为 $P_n^*(SP_n^*)$.

命题 4 $A \in SP_n^*(P_n^*) \Leftrightarrow H(A) \in SP_n(P_n)$.

命题 5 设 $A \in Q^{n \times n}, P \in GL_n(Q)$,则

$$A \in SP_n^*(P_n^*) \Leftrightarrow P^* AP \in SP_n^*(P_n^*).$$

命题 6 $A \in P_n^*$ 为可逆的.

证明 若 A 奇异,则存在 $\theta \neq q \in Q^{n \times 1}$,使 $Aq = \theta$,于是,

$$q^* Aq = 0,$$

矛盾. 故 $A \in GL_n(Q)$. □

命题 7 任何亚正定阵的逆阵仍为亚正定阵.

定理 8 设 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in Q^{n \times n}$

其中 $A_{ii} \in Q^{n_i \times n_i}(n_1 + n_2 = n)$,则以下条件等价:

(1) $A \in SP_n^*$;

(2) $\operatorname{rank}(A_{22} + A_{22}^*) = \operatorname{rank}(A_{12}^* + A_{21}, A_{22} + A_{22}^*)$,且 A_{22} 与 $A_{11} - U^* A_{22} U$ 均为亚半正定矩阵,其中 U 为矩阵方程

$$(A_{22} + A_{22}^*)X = A_{12}^* + A_{21}$$

的任一固定解;

(3) $\operatorname{rank}(A_{11} + A_{11}^*) = \operatorname{rank}(A_{11} + A_{11}^*, A_{12} + A_{21}^*)$,且 A_{11} 与 $A_{22} - U^* A_{11} U$ 均为亚半正定阵,其中 U 为矩阵方程

$$(A_{11} + A_{11}^*)X = A_{12} + A_{21}^*$$

的任一固定解.

证明 注意到

$$2H(A) = \begin{pmatrix} A_{11} + A_{11}^* & A_{12} + A_{21}^* \\ A_{21} + A_{12}^* & A_{22} + A_{22}^* \end{pmatrix},$$

$$2H(A_{22}) = A_{22} + A_{22}^*,$$

$$2H(A_{11} - U^* A_{22} U) = A_{11} + A_{11}^* - U^*(A_{22} + A_{22}^*)U,$$

则由定理 4 立得(1)⇔(3). 同理可证(1)⇔(2). □

定理 9 设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & X_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ n-r_1-r_2 \end{matrix} \in Q^{n\times n},$$

（列分块依次为 r_1，r_2，$n-r_1-r$）

则存在 $X_{13}\in Q^{r_1\times(n-r_1-r_2)}$ 使 $A\in SP_n^*$ 的充要条件为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\in SP_{r_1+r_2}^*, A_2=\begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}\in SP_{n-r_1}^*.$$

证明 令 $B_{11}=A_{11}+A_{11}^*$, $B_{12}=A_{12}+A_{21}^*$, $B_{13}=X_{13}+A_{31}^*$, $B_{22}=A_{22}+A_{22}^*$, $B_{23}=A_{23}+A_{32}^*$, $B_{33}=A_{33}+A_{33}^*$，则

$$2H(A_1)=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{pmatrix}, 2H(A_2)=\begin{pmatrix} B_{22} & B_{23} \\ B_{23}^* & B_{33} \end{pmatrix},$$

$$2H(A)=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12}^* & B_{22} & B_{23} \\ B_{13}^* & B_{23}^* & B_{33} \end{pmatrix}.$$

由定理 8 及命题 4 立得定理 9 的证明．□

定理 10 设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\in Q^{n\times n}$

其中 $A_{ii}\in Q^{n_i\times n_i}(n_1+n_2=n)$，则以下条件等价：

(1) $A\in P_n^*$；

(2) A_{22} 与 $A_{11}-\frac{1}{2}(A_{12}+A_{21}^*)(A_{22}+A_{22}^*)^{-1}(A_{21}+A_{12}^*)$ 均为亚正定自共轭矩阵；

(3) A_{11} 与 $A_{22}-\frac{1}{2}(A_{21}+A_{12}^*)(A_{11}+A_{11}^*)^{-1}(A_{12}+A_{21}^*)$ 均为亚正定自共轭矩阵．

推论 1 设 $A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \eta_n \\ \alpha_n^* & b_{nn} \end{pmatrix}\in Q^{n\times n}$

其中 $A_{n-1}\in Q^{(n-1)\times(n-1)}$, $\alpha_n,\eta_n\in Q^{(n-1)\times 1}$, $b_{nn}\in Q$,

则 A 是亚正定阵的充要条件为 $\mathrm{Re}[b_{nn}]>0$,

$$A_{n-1}-\frac{(\eta_n+\alpha_n)(\eta_n+\alpha_n)^*}{4Re[b_{nn}]}\in P_{n-1}^*.$$

由推论 1，我们可容易地构造一个亚正定矩阵．事实上，利用任意给定的一个矩阵

$$\begin{pmatrix} B_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \ddots & \\ \beta_2^* & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 b_k 和 $\beta_k\in Q^{(k-1)\times 1}(k=2,\cdots,n)$，$\mathrm{Re}[b_{kk}]>0(k=1,\cdots,n)$，

$$B_1=\begin{pmatrix} b_{11} & b_2 \\ \beta_2^* & b_{22} \end{pmatrix},$$

利用下列的迭代，可构造一个亚正定矩阵 $A=A_n$：

$$A_1=(b_{11})\in Q^{1\times 1},$$

$$A_k=\begin{pmatrix} A_{k-1}+\dfrac{(b_k+\beta_k)(b_k+\beta_k)^*}{4\mathrm{Re}[b_{kk}]} & b_k \\ \beta_k^* & b_{kk} \end{pmatrix}\in Q^{k\times k}$$

$k=2,\cdots,n.$

定理 11　设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & X_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ n-r_1-r_2 \end{matrix}\in Q^{n\times n},$$

$$\begin{matrix} r_1 & r_2 & n-r_1-r_2 \end{matrix}$$

则存在 $X_{13}\in Q^{r_1\times(n-r_1-r_2)}$，使 $A\in P_n^*$ 的充要条件为

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\in P_{r_1+r_2}^*,\begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}\in P_{n-r_1}^*.$$

证明可仿定理 9 的证明．

下面我们从矩阵的次对角线出发，定义次自共轭阵，然后定义斜(亚)(半)正定阵，给出分块四元数阵为斜(亚)(半)正定的充要

条件.

定义 4 设$=(a_{ij})\in K^{m\times n}$, $B=(b_{ij})\in K^{n\times m}$,若

$$b_{ij}=a_{m-j+1,n-i+1}, i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m,$$

则称 B 为 A 的次转置阵.

矩阵 A 的共轭次转置阵记为 $A^{(*)}$.

命题 8 设 $A\in K^{m\times n}$, $B\in K^{n\times t}$,及 $P\in GL_n(K)$,则

(i) $(AB)^{(*)}=B^{(*)}A^{(*)}$;

(ii) $(P^{(*)})^{-1}=(P^{-1})^{(*)}$.

以下恒记$(P^{-1})^{(*)}=P^{-(*)}$.

定义 5 设 $A\in K^{n\times n}$,若 $A^{(*)}=A(-A)$,则称 A 为次(反)自共轭矩阵.

$H_n(K)(S_n(K))$表示 K 上的全体 n 阶次(反)自共轭矩阵.

命题 9 任意的 $A\in Q^{n\times n}$都可唯一地分解为

$$A=H_1(A)+S_1(A)$$

其中,

$$H_1(A)=\frac{1}{2}(A+A^{(*)})\in H_n(Q), S_1(A)=\frac{1}{2}(A-A^{(*)}).$$

命题 10 $A\in K^{n\times n}$, $P\in GL_n(K)$,则

$$A\in H_n(K)\Leftrightarrow P^{*}AP\in H_n(K).$$

记

$$\mathrm{sdiag}(d_1,\cdots,d_n)=\begin{pmatrix} O & & d_1 \\ & ⋰ & \\ d_n & & O \end{pmatrix},$$

$$J_n=\mathrm{sdiag}(1,\cdots,1).$$

命题 11 对于任意的 $A\in H_n(K)$,一定有 $P\in GL_n(K)$使

$$P^{(*)}AP=\mathrm{sdiag}(d_1,\cdots,d_r,0,\cdots,0)$$

其中,$r=\mathrm{rank}A, d_i\neq 0, i=1,\cdots,r$.

定义 6 设 $A\in H_n(Q)$,若对任意的非零 $x\in Q^{n\times 1}$,有 $x^{(*)}Ax$

$>0(\geqslant 0)$，则称 A 为斜（半）正定矩阵．记为 psd．

全体 n 阶 psd 阵记为 $SP_n^{\triangle}$，$A \trianglerighteq O (\triangleright O)$ 表示 A 为斜半正定（正定）阵．

命题 12　设 $A \in SP_n^{\triangle}$，则有广义酉矩阵 U 使

$$U^{(*)}AU = \mathrm{sdiag}(d_1, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0)$$

其中，$r = \mathrm{rank}A$，$d_i > 0$，$i = 1, \cdots, r$．

命题 13　设 $A \in H_n(Q)$，则

$$A \in SP_n^{\triangle} \Leftrightarrow A = B^{(*)}J_r B$$

其中 $B \in Q^{r\times n}$．

命题 14　设 $P \in GL_n(Q)$，则

$$A \in SP_n^{\triangle} \Leftrightarrow P^{(*)}AP \in SP_n^{\triangle}.$$

命题 15　设 $A = (a_{ij}) \in SP_n^{\triangle}$，且 $a_{i,n-i+1} = 0$，则

$$a_{ij} = a_{n-j+1,n-i+1} = 0, j = 1, \cdots, n.$$

证明　由命题 13 知，$A = B^{(*)}J_r B$，其中

$$B = (b_{sl}) \in Q^{r\times n}.$$

令

$$B = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n),$$

则

$$a_{i,n-i+1} = \alpha_{n-i+1}^{(*)} J_r \alpha_{n-i+1} = \sum_{k=1}^{r} \overline{b}_{k,n-i+1} b_{k,n-i+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \overline{b}_{k,n-i+1} \overline{\overline{b}}_{k,n-i+1} = 0.$$

故

$$\overline{b}_{k,n-i+1} = 0, k = 1, \cdots, r.$$

从而，

$$\alpha_{n-i+1}^{(*)} = \theta.$$

于是，

$$a_{ij} = \alpha_{n-i+1}^{(*)} J_r \alpha_j = 0.$$

因 $A=A^{(*)}$，故

$$a_{ij}=a_{n-j+1,n-i+1}=0,j=1,\cdots,n. \square$$

定理 12

设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_1^{(*)} \end{pmatrix}\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \in SP_n^{\triangle},$$
$$\quad n_2 \quad\ n_1$$

则

(1) A_2 与 A_3 是 psd；

(2) $\operatorname{rank}(A_3,A_1^{(*)})=\operatorname{rank}A_3$，从而 $A_3X=A_1^{(*)}$ 有解．

证明 (1)由命题 13 知，$A=G^{(*)}J_rG$，其中 $G\in Q^{r\times n}$，令

$$G=(C_1,C_2),$$

则

$$A=\begin{pmatrix} C_2^{(*)}J_rC_1 & C_2^{(*)}J_rC_2 \\ C_1^{(*)}J_rC_1 & C_1^{(*)}J_rC_2 \end{pmatrix}.$$

故

$$A_2=C_2^{(*)}J_rC_2,A_3=C_1^{(*)}J_rC_1.$$

由命题 13，A_2 与 A_3 是 psd.

(2) 因 A_3 是 psd，故由命题 12，存在广义酉矩阵 Q_1，使

$$Q_1^{(*)}A_3Q_1=\operatorname{sdiag}(d_1,\cdots,d_{r_0},0,\cdots,0),$$

其中 $r_0=\operatorname{rank}A_3$，$d_i>0$，$(i=1,\cdots,r_0)$．注意到

$$\begin{pmatrix} O & Q_1^{(*)} \\ I_{n_1} & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_1^{(*)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & Q_1 \\ I_{n_1} & O \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} Q_1^{(*)}A_1^{(*)} & Q_1^{(*)}A_3Q_1 \\ A_2 & A_1Q_1 \end{pmatrix}.$$

由命题 15 知，

$$\mathrm{rank}(Q_1^{(*)}A_1^{(*)},Q_1^{(*)}A_3Q_1)=r_0=\mathrm{rank}A_3,$$

故

$$\mathrm{rank}(A_3,A_1^{(*)})=\mathrm{rank}Q_1^{(*)}(A_3,A_1^{(*)})\begin{pmatrix}Q_1 & O\\ O & I_{n_2}\end{pmatrix}=\mathrm{rank}A_3.$$

于是，矩阵方程 $A_3X=A_1^{(*)}$ 有解 . □

由定理 12，可仿照定理 4 的证明证得下面的

定理 13 设 $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_1^{(*)}\end{pmatrix}\begin{matrix}n_1\\ n_2\end{matrix}\in H_n(Q)$，
$\quad\quad\quad\quad n_2 \quad n_1$

则以下条件等价：

(1) $A\in SP_n^{\triangle}$；

(2) $\mathrm{rank}(A_3,A_1^{(*)})=\mathrm{rank}A_3$ 且 A_3 与 $A_2-U^{(*)}A_3U$ 皆为 psd，其中 U 为矩阵方程 $A_3X=A_1^{(*)}$ 的任一固定解；

(3) $\mathrm{rank}(A_1,A_2)=\mathrm{rank}A_2$，且 A_2 与 $A_3-U^{(*)}A_2U$ 皆为 psd，其中 U 为矩阵方程 $A_2X=A_1$ 的任一固定解 .

定理 14 设

$$A=\begin{pmatrix}X_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{11}^{(*)}\\ A_{31} & A_{21}^{(*)} & X_{11}^{(*)}\end{pmatrix}\begin{matrix}r_1\\ r_2\\ n-r_1-r_2\end{matrix}\in H_n(Q),$$
$$\quad n-r_1-r_2 \quad\quad r_2 \quad\quad r_1$$

则存在 $X_{11}\in Q^{r_1\times(n-r_1-r_2)}$ 使 $A\trianglerighteq O(\triangleright O)$ 的充要条件为

$$\begin{pmatrix}A_{12} & A_{13}\\ A_{22} & A_{12}^{(*)}\end{pmatrix}\trianglerighteq O(\triangleright O),\begin{pmatrix}A_{21} & A_{22}\\ A_{31} & A_{21}^{(*)}\end{pmatrix}\trianglerighteq O(\triangleright O).$$

定义 7 设 $A\in Q^{n\times n}$，如果对任意的非零向量 $x\in Q^{n\times 1}$，有

$$\mathrm{Re}[x^{(*)}Ax]\geqslant 0(>0),$$

则称 A 为斜亚半正定(斜亚正定)的，简称 ssd(sd).

用 $SP_n^{(*)}(P_n^{(*)})$ 表示全体 n 阶 ssd(sd)阵.

命题 16 设 $P \in GL_n(Q)$，则

$$SP_n^{(*)}(P_n^{(*)}) \Leftrightarrow P^{(*)}AP \in SP_n^{(*)}(P_n^{(*)})$$

定理 15 设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \in Q^{n\times n},$$
$$\quad n_2 \quad n_1$$

则以下条件等价：

(1) $A \in SP_n^{(*)}$；

(2) $\operatorname{rank}(A_3+A_3^{(*)})=\operatorname{rank}(A_1^{(*)}+A_4, A_3+A_3^{(*)})$ 且 A_3 与 $A_2-U^{(*)}A_3U$ 皆为 ssd，其中 U 为矩阵方程 $(A_3+A_3^{(*)})X=A_4+A_1^{(*)}$ 的任一固定解；

(3) $\operatorname{rank}(A_2+A_2^{(*)})=\operatorname{rank}(A_2+A_2^{(*)}, A_1+A_4^{(*)})$ 且 A_2 与 $A_3-U^{(*)}A_2U$ 皆为 ssd，其中 U 为矩阵方程 $(A_2+A_2^{(*)})X=A_1+A_4^{(*)}$ 的任一固定解.

定理 16 设

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \in Q^{n\times n},$$
$$\quad n_1 \quad n_2$$

则以下条件等价：

(1) $A \in P_n^{(*)}$；

(2) A_3 与 $A_2-\left(\frac{A_1+A_4^{(*)}}{2}\right)\left(\frac{A_3+A_3^{(*)}}{2}\right)^{-1}\left(\frac{A_1^{(*)}+A_4}{2}\right)$ 均为 sd 阵；

(3) A_2 与 $A_3-\left(\frac{A_1^{(*)}+A_4}{2}\right)\left(\frac{A_2+A_2^{(*)}}{2}\right)^{-1}\left(\frac{A_1+A_4^{(*)}}{2}\right)$ 均为 sd 阵.

定理 17　设

$$A=\begin{pmatrix} X_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ n-r_1-r_2 \end{matrix} \in Q^{n\times n},$$
$$\qquad n-r_1-r_2 \quad r_2 \quad r_1$$

则存在 $X_{11}\in Q^{r_1\times(n-r_1-r_2)}$ 使 $A\in SP_n^{(*)}(P_n^{(*)})$ 的充要条件为

$$\begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}\in SP_{r_1+r_2}^{(*)}(P_{r_1+r_2}^{(*)}),\begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}\in SP_{n-r_1}^{(*)}(P_{n-r_1}^{(*)}).$$

§4　体上矩阵的分解

研究矩阵方程的一个重要工具就是矩阵的分解．本节给出任意体上的双矩阵分解，四元数矩阵的奇异值分解及复矩阵的广义奇异值分解等．

1　任意体 Ω 上的双矩阵分解

本段，我们利用矩阵技巧，给出具有相同行数或相同列数的双矩阵分解定理及其具体分解方法．此分解定理在解决许多任意体上的矩阵方程中起着关键性的作用．

定理 1　设 $A\in\Omega_r^{m\times n}, B\in\Omega_s^{p\times q}, C\in\Omega_{r_0}^{m\times k}, D\in\Omega_{s_0}^{l\times q}$，则有 $P\in GL_m(\Omega), Q\in GL_n(\Omega), Q_0\in GL_k(\Omega), V\in GL_p(\Omega), U\in GL_q(\Omega), V_0\in GL_l(\Omega)$ 使

$$\text{(i)}\quad PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix},\quad PCQ_0=\begin{pmatrix} O & I_{r_2} & O \\ O & O & O \\ I_{r_1} & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r_2 \\ r-r_2; \\ r_1 \\ m-r-r_1 \end{matrix} \tag{1}$$

(ii) $VBU=\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} s \\ q-s \end{matrix}, V_0DU=\begin{pmatrix} O & O & I_{s_1} & O \\ I_{s_2} & O & O & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ p-s_0 \end{matrix}$.　(2)

其中，$r_0=r_1+r_2$，$s_0=s_1+s_2$.

证明　(仅证(i)，同理可证(ii))

因 $A\in \Omega_r^{m\times n}$，故由§2定理3知，有 $P_1\in GL_m(\Omega)$ 及 $L\in GL_n(\Omega)$，使

$$P_1AL=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}, \tag{3}$$

令

$$P_1C=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}.$$

对于 C_2，有 $P_2\in GL_{m-r}(\Omega)$ 及 $Q_1\in GL_k(\Omega)$，使

$$P_2C_2Q_1=\begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ m-r-r_1 \end{matrix}. \tag{4}$$
$$\begin{matrix} r_1 & k-r_1 \end{matrix}$$

令 $C_1Q_1=(\overset{r_1}{C_{11}},\overset{k-r_1}{C_{12}})$，则由§2的推论1、定理2及定理8得

$$\begin{aligned}\text{rank}C &=\text{rank}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}P_1CQ_1 \\ &=\text{rank}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1Q_1 \\ C_2Q_1 \end{pmatrix} \\ &=\text{rank}\begin{pmatrix} C_1Q_1 \\ P_2C_2Q_1 \end{pmatrix}=\text{rank}\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &=\text{rank}\begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ C_{11} & C_{12} \end{pmatrix}=r_1+\text{rank}C_{12}.\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{rank} C_{12} = r_0 - r_1 \overset{\text{def}}{=\!=} r_2. \tag{5}$$

对于 C_{12}，有 $P_3 \in GL_r(\Omega)$ 和 $Q \in GL_{k-r_1}$，使

$$P_3 C_{12} Q_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \\ r-r_2 \end{matrix}. \tag{6}$$

设

$$P = \begin{pmatrix} P_3 & (-P_3 C_{11}, O) P_2 \\ O & P_2 \end{pmatrix} P_1, Q = L \begin{pmatrix} P_3^{-1} & O \\ O & I_{n-r} \end{pmatrix};$$

$$Q_0 = Q_1 \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix},$$

则由(3)～(6)可得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}; PCQ_o = \begin{pmatrix} O & I_{r_2} & O \\ O & O & O \\ I_{r_1} & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \\ r-r_2. \\ r_1 \\ m-r-r_1 \end{matrix}. \quad \square$$

注 1 适当调整定理 1 的证明，(1)可有如下的形式：

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}; PCQ_0 = \begin{pmatrix} O & O & O \\ O & I_{r_2} & O \\ O & O & I_{r_1} \\ O & O & O \end{pmatrix} \begin{matrix} r-r_2 \\ r_2 \\ r_1 \\ m-r-r_1 \end{matrix}; \tag{7}$$

(2)可有如下形式：

$$VBU = \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{matrix} s \\ p-s \end{matrix}; V_o DU = \begin{pmatrix} O & O & O & O \\ O & I_{s_2} & O & O \\ O & O & O & I_{r_1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

我们可以根据(6)式中 I_{s_2} 的不同位置得出不同的分解结果，要视具体问题而定采用哪种分解形式.

推论 1 设 $A_i \in \Omega^{m \times n_i}$，则存在可逆阵 P 和 Q_i 使得 PA_iQ_i 是一个由 0 与 1 构成的矩形对角阵($i=1,2,\cdots,s$).

定义 1 称(1)式和(2)式分别为矩阵对(A,C)和(B,D)的DSR分解与DSC分解．上述两种分解均称为双矩阵分解．

由推论1知，双矩阵分解可推广到多个矩阵的分解．

由§2的定理1与定理2，我们可给出定理1中(A,C)的DSR分解与(B,D)的DSC分解的具体方法．

DSR分解：对矩阵

$$\begin{pmatrix} I_m & A_{mn} & C_{mk} \\ O & I_n & O \end{pmatrix}$$

的前m行和$\begin{pmatrix} A_{mn} \\ I_n \end{pmatrix}$分别作初等行和初等列变换化为如下形式

$$\begin{bmatrix} P_1 & \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ O & Q & O \end{bmatrix};$$

对

$$\begin{bmatrix} P_1 & \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ O & Q & I_k \end{bmatrix}$$

的前m行和后k列分别作初等行和初等列变换化为

$$\begin{bmatrix} P & \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} O & I_{r_2} & O \\ O & O & O \\ I_{r_1} & O & O \\ O & O & O \end{bmatrix} \\ O & O & Q_0 \end{bmatrix}$$

其中$r_1+r_2=r_0$，则P,Q_0及Q即为所求．

DSC分解：对矩阵

$$\begin{bmatrix} I_q & O \\ B_{pq} & I_p \\ D_{lq} & O \end{bmatrix}$$

的前 q 列和 (B_{pq}, I_p) 分别作初等列和初等行变换化为如下形式

$$\begin{bmatrix} U_1 & O \\ \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} & V \\ (D_1, D_2) & O \end{bmatrix};$$

对

$$\begin{bmatrix} U_1 & O \\ \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ (D_1, D_2) & I_l \end{bmatrix}$$

的后 l 行和前 q 列分别作初等行变换和初等列变换化为

$$\begin{bmatrix} U & O \\ \begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ \begin{bmatrix} O & O & I_{s_2} & O \\ I_{s_1} & O & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} & V_0 \end{bmatrix}$$

其中 $s_1+s_2=s_0$，则 U, V_0 及 V 即为所求.

2 实四元数矩阵的奇异值分解

Q 是一个实四元数体，$Q_\perp^{n\times t}=\{V\in Q^{n\times t} \mid V^* V=I_t\}$.

定理 2[6] 设 $A\in Q_r^{m\times n}$，则存在广义酉矩阵 $U\in Q_\perp^{m\times m}, V\in Q_\perp^{n\times n}$ 使得

$$U^* AV=\mathrm{diag}(D, O) \tag{9}$$

其中 $D=\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$，$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0$ 是 $A^* A$ 的正特征值和算术平方根.

定理 3[6] 设 $A\in Q_r^{m\times n}(r>0)$，则有 $U\in Q_\perp^{m\times r}, V\in Q_\perp^{n\times r}$ 使得

$$A=UDV^*, D=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r), \tag{10}$$

其中，$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ 是 A^*A 或 AA^* 的正特征值的算术平方根．

注 2　A^*A 与 AA^* 有相同的非负特征值；(9)及(10)中的 D 是唯一确定的．

定义 2　自共轭四元数矩阵 A^*A 或 AA^* 的正特征值的平方根叫做 A 的奇异值．(10)称为 A 的奇异值分解，记为 SVD.

推论 2[6]　设 $A \in Q^{n\times n}$，则

$$A=PU=U_1P_1 \tag{11}$$

这里 $P, P_1 \in SP_n$ 都是唯一确定的，$U, U_1 \in U^{n\times n}$；且若 A 非奇异，则 $P, P_1 \in P_n$ 并且 $U=U_1$ 是唯一确定的．

注 3　(11)式称为 A 的极分解．

3　复矩阵的广义奇异值分解

1976 年，C. F. VanLoan 研究了复矩阵的广义奇异值分解[7] (GSVD).

定理 4[7]　设 $A \in C^{m\times n}$，$B \in C^{m\times p}$，则存在酉矩阵 $U \in C^{n\times n}$ 及 $V \in C^{p\times p}$ 使

$$A=M\sum\nolimits_A U^*, B=M\sum\nolimits_B V^*, \tag{12}$$

其中，

$$\sum\nolimits_A=\begin{pmatrix} I_A & & \\ & S_A & \\ & & O_A \\ \hline & O & \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ s \\ k-r-s \\ m-k \end{matrix}, \tag{13}$$

$$\sum\nolimits_B=\begin{pmatrix} O_B & & \\ & S_B & \\ & & I_B \\ \hline & O & \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ s \\ k-r-s \\ m-k \end{matrix}, \tag{14}$$

这里，$k=\operatorname{rank}(A,B)$，$r=k-\operatorname{rank}B$，$s=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B-k$，$I_A$ 与 I_B 是单位阵，O_A 与 O_B 是零阵，$S_A=\operatorname{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$，$S_B=\operatorname{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_s)$，$1>\alpha_1\geqslant\cdots\geqslant\alpha_s>0$，$0<\beta_1\leqslant\cdots\leqslant\beta_s<0$，$\alpha_i^2+\beta_i^2=1$，$i=1,\cdots,s$.

§5 环上矩阵的广义逆

矩阵的广义逆是研究矩阵方程的一个十分重要的工具．本节主要证明正则环上的任意矩阵均存在广义{1}逆，给出带有对合反自同构的环上的矩阵的 Moore－Penrose 逆均存在的若干充要条件．

以下设 R 是一个具有对合反自同构 σ 的结合环．

定义 1 设 $A\in R^{m\times n}$，$X\in R^{n\times m}$满足(1)$AXA=A$，(2)$XAX=X$，(3)$AX=(AX)^*$，(4)$XA=(XA)^*$，则称 X 是 A 的 Moore－Penrose 逆，记作 A^+，满足上述方程(i)，…，(j)的 X 叫做一个$(i,\cdots,j)$逆，记作 $A^{(i,\cdots,j)}$，所有 $A^{(i,\cdots,j)}$ 的集合记成 $A\{i,\cdots,j\}$. 其中 $Y^*=Y'^\sigma$，而 Y' 是矩阵 Y 的转置矩阵，Y^σ 为(σy_{ij})，此处 $Y=(y_{ij})$. 易见$(Y^*)^*=Y$，$(XY)^*=Y^*X^*$.

容易验证，对一般的环，若 A^+存在，则必唯一．

定义 2 环 R 称为满足正性条件，如果对任意的自然数 s 及 R 中的元素 $a_1,\cdots,a_s$，$\sum_{i=1}^{s}a_ia_i^\sigma=0$ 当且仅当 $a_i=0$，$(i=1,\cdots,s)$.

易证得下面的

命题 1 环 R 满足正性条件$\Leftrightarrow$对任意自然数 m 及 n，任意的 $m\times n$ 阵 A，$AA^*=O\Leftrightarrow A=O$.

引理 1 设 $A\in R^{m\times n}$，$X\in R^{n\times m}$，如果 $A-AXA$ 存在广义{1}逆，则 A 也存在广义{1}逆．

证明 设 B 为 $A-AXA$ 的一个广义{1}逆，则

$$A-AXA=(A-AXA)B(A-AXA).$$

将此式展开并整理后得，

$$A=A(X+B-XAB-BAX+XABAX)A.$$

从而

$$X+B-XAB-BAX+XABAX$$

为 A 的一个广义{1}逆．□

引理 2 设 $R^{1\times n}$（或 $R^{m\times 1}$）中的任意矩阵均存在广义{1}逆，则 $R^{m\times n}$ 中的任意矩阵均存在广义{1}逆．

证明 设

$$A=(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots,\alpha'_m)'\in R^{m\times n}$$

及

$$A_1=A-A(0,\cdots,0,\alpha_m^{(1)})A,$$

则可检验 A_1 有下面的形式：

$$A_1=(\beta'_1,\cdots,\beta'_{m-1},O)'.$$

设

$$A_2=A_1-A_1(O,\cdots,O,\beta_{m-1}^{(1)},O)A_1,$$

则

$$A_2=(\gamma'_1,\cdots,\gamma'_{m-2},O,O)'.$$

如此继续下去，可设

$$A_{m-1}=A_{m-2}-A_{m-2}(O,\eta^{(1)},O,\cdots,O)A_{m-2},$$

则

$$A_{m-1}=(l',O,\cdots,O)'.$$

最后由

$$A_{m-1}-A_{m-1}(l^{(1)},O,\cdots,O)A_{m-1}=O$$

得 A_{m-1} 有广义逆．反复利用引理 1，即得 A 有广义{1}逆．

对称地，可得若 $R^{m\times 1}$ 中的任意矩阵有广义逆，则 $R^{m\times n}$ 中的每个矩阵都有广义{1}逆．□

定理 1 $R^{m\times n}$中的任意矩阵均存在广义{1}逆的充要条件是 R 为正则环(即对$\forall\ a\in R$,有 $x\in R$ 使 $a=axa$).

证明 设 $a\in R$,取 $A=aE_{11}$(E_{ij}表示第 i 行第 j 列元素为 1,其余元素全为零的矩阵). 令 $A^{(1)}=(b_{ij})$,则由

$$aE_{11}=(aE_{11})A^{(1)}(aE_{11})$$

可知 $a=ab_{11}a$. 故 R 为正则环.

反之,设 R 为正则环,因 $a\in R^{1\times 1}$有广义{1}逆,故由引理 2 得 $R^{m\times 1}$中的任意矩阵有广义{1}逆. 进而由引理 2 知,$A\in R^{m\times n}$有广义{1}逆. □

推论 1 单 Artinian 环上的矩阵均有广义{1}逆. 从而,任意体上的矩阵也均有广义{1}逆.

定理 2 以下条件等价:

(1) R 上的任意矩阵均存在 Moore-Penrose 逆;

(2) R 上的任意矩阵均存在广义{1,2,3}逆;

(3) R 上的任意矩阵均存在广义{1,2,4}逆;

(4) R 上的任意矩阵均存在广义{1,3}逆;

(5) R 上的任意矩阵均存在广义{1,4}逆;

(6) R 满足正性条件且 R 上的任意矩阵均有广义{1}逆;

(7) R 是满足正性条件的正则环;

(8) R 上的矩阵方程 $A=XA^*A$ 关于 X 有解;

(9) R 上的矩阵方程 $A=AA^*X$ 关于 X 有解;

(10) R 满足正性条件且对 R 上的任意矩阵 A,$(A^*A)^{(1)}$存在;

(11) R 满足正性条件且对 R 上的任意矩阵 A,$(AA^*)^{(1)}$存在;

(12) R 满足正性条件且对 $B\in SC_n(R)$,$B^{(1)}$存在.

为证明定理 2,我们需要下面的几个引理.

引理 3 $(A^{(1)})^*$是 A^* 的一个广义{1}逆.

引理 4 B 与 C 是 R 上的矩阵，$C^{(1)}$ 是 C 的任意广义{1}逆，则

(*i*) $BC^{(1)}C=B\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $XC=B$ 有解．

(*ii*) $CC^{(1)}B=B\Leftrightarrow$ 矩阵方程 $CX=B$ 有解．

下面给出定理 2 的证明．

证明 (1)⇒(2)⇒(4)，(1)⇒(3)⇒(5)，(6)⇒(10)，(6)⇒(11)，(12)⇒(11)，(6)⇒(12)均显然．(6)⇒(7)由定理 1 即知．

(4)⇒(6) 设 A 为 R 上的任意矩阵，则由(4)知，A 的{1,3}逆 $A^{(1,3)}$ 存在，因此 $A^{(1)}$ 也存在．令 $A^*A=O$，则

$$A=AA^{(1,3)}A=(AA^{(1,3)})^*A=(A^{(1,3)})^*A^*A=O.$$

故由命题 1 知，R 满足正性条件．

(6)⇒(4) 令 $H=(A^*A)^{(1)}A^*$，$M=AHA-A$，易算得 $MM^*=O$. 于是由正性条件知 $M=O$，此即 $AHA=A$. 从而，

$$\begin{aligned}(AH)^* &= A((A^*A)^{(1)})^*A^* \\ &= AHA((A^*A)^{(1)})^*A^* \\ &= A(A^*A)^{(1)}A^*A((A^*A^{(1)})^*A^* \\ &= A(A^*A)^{(1)}(AHA)^* = AH.\end{aligned}$$

故 H 为 A 的{1,3}逆．

(6)⇒(5) 设 $G=A^*(AA^*)^{(1)}$，由正性条件仿上易证 $AGA=A$. 由此，

$$\begin{aligned}(GA)^* &= A^*((AA^*)^{(1)})^*A \\ &= A^*((AA^*)^{(1)})^*AGA \\ &= A^*((AA^*)^{(1)})^*AA^*(AA^*)^{(1)}A \\ &= (AGA)^*(AA^*)^{(1)}A \\ &= A^*(AA^*)^{(1)}A=GA.\end{aligned}$$

故 G 为 A 的{1,4}逆．

(5)⇒(6) 设 A 的{1,4}逆存在，则 $A^{(1)}$ 也存在．令 $AA^*=O$，则

$$A=AA^{(1,4)}A=A(A^{(1,4)}A)^*=AA^*(A^{(1,4)})^*=O.$$

因此,R 满足正性条件.

下证(1)⇒(6).

(1)⇒(6) 设 A^+ 存在,则 $A^{(1,4)}$ 存在. 故若 $AA^*=O$,则

$$O=AA^*(A^+)^*=A(A^+A)^*=AA^+A=A.$$

(6)⇒(1) 令 $G=A^*(A^*AA^*)^{(1)}A^*$. 因(4)⇔(6)⇔(5),故可设 X_0 及 X_1 分别为 A 的{1,3}逆和{1,4}逆. 易证 X_0 是 $AA^*=AA^*AX$ 之解,故若设 $P=AA^*A(AA^*A)^{(1)}AA^*$,由引理 4 知 $P=AA^*$. 由此再根据引理 3,有

$$(AGA-A)(AGA-A)^*=$$

$$AA^*(A^*AA^*)^{(1)}A^*P+AA^*-AA^*(A^*AA^*)^{(1)}A^*AA^*-P=O.$$

于是,由正性条件推得 $AGA=A$. 又易验证 $X_1(X_0)^*$ 为 $A^*=XA^*AA^*$ 之解,由引理 4 知

$$A^*(A^*AA^*)^{(1)}A^*AA^*=A^*,$$

从而有 $GAG=G$. 另由 $A=XAA^*A$ 有解 $X_0^*X_1$ 可得

$$A(AA^*A)^{(1)}AA^*A=A.$$

应用此式及 $AGA=A$,有

$$\begin{aligned}((AG)^*-AG)((AG)^*-AG)^*&=A(AA^*A)^{(1)}AA^*AG-AGAG\\&\quad-A(AA^*A)^{(1)}AA^*A(AA^*A)^{(1)}AA^*\\&\quad+AGA(AA^*A)^{(1)}AA^*=O.\end{aligned}$$

从而 $(AG)^*=AG$. 类似可证 $(GA)^*=GA$.

(4)⇒(8) 因

$$A=AA^{(1,3)}A=(AA^{(1,3)})^*A=(A^{(1,3)})^*A^*A.$$

故 $(A^{(1,3)})^*$ 是矩阵方程 $A=XA^*A$ 的解.

(8)⇒(10) 设 B 为矩阵方程 $A=XA^*A$ 的一个解. 如果 $A^*A=O$,则 $A=BA^*A=O$. 故 R 满足正性条件,又因 $A^*A=A^*AB^*BA^*A$,即 B^*B 为 A^*A 的一个广义{1}逆.

(10)⇒(6) 令 $G=(A^*A)^{(1)}A^*$,则 $A^*AGA=A^*A$. 令 $M=$

$AGA-A$,则可验知 $M^*M=O$. 由正性条件知 $M=O$,即 $A=AGA$.

(5)⇒(9)与(4)⇒(8)类似可证,其余均相类似分别可证 . □

推论 2 设 Ω 是带有对合反自同构的体,则以下条件等价:

(1) Ω 上的矩阵均存在 Moore—Penrose 逆;

(2) Ω 满足正性条件;

(3) A 为 Ω 上的矩阵,则 $\text{rank}A=\text{rank}A^*A=\text{rank}AA^*$.

推论 3 $A\in R^{m\times n}$,则

(1) $(A^*A)^{(1)}A^*$ 是 A 的一个广义$\{1,3\}$逆;

(2) $A^*(AA^*)^{(1)}$是 A 的一个广义$\{1,4\}$逆;

(3) $A^*(A^*AA^*)^{(1)}A^*$ 是 A 的唯一的 Moore—Penrose 逆;

§6 四元数矩阵的弱直积、弱圈积与拉直

矩阵的 Kronecker 乘积、Hadamard 积与矩阵的拉直和矩阵方程的研究有着密切的关系. 在常规矩阵论中将广泛运用的 Kronecker 乘积与 Hadamard 乘积的基本结论推广到一般体上是相当困难的(尽管它可借助于换位子理论). 本节引进实四元数体 Q 上矩阵的弱直积与弱圈积,讨论了它们的基本性质[10].

定义 1 设 $A=(a_{ij})\in Q^{m\times n}$,$B=(b_{ij})\in Q^{p\times q}$,称

$$\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}=(a_{ij}b_{kl})_{mp\times nq}$$

为 A 与 B 的直积,记为 $A\otimes B$,当 B 是 Q 的中心 R 上的 $p\times q$ 矩阵时,称 $A\otimes B$ 为弱右直积;当 $A\in R^{m\times n}$时,称 $A\otimes B$ 为弱左直积,两者统称为弱直积 .

Q 上矩阵的直积是常规矩阵论中矩阵的 Kronecker 乘积的推广 .

命题 1 直积满足结合律与分配律及$(A\otimes B)'=A'\otimes B'$，并且，对弱直积来说，恒有

(i) $(\overline{A\otimes B})=\overline{A}\otimes B(=\overline{A}\otimes\overline{B})$，当 $B\in R^{p\times q}$.

(ii) $(\overline{A\otimes B})=A\otimes\overline{B}(=\overline{A}\otimes\overline{B})$，当 $A\in R^{m\times n}$.

证明 命题的前半部分显然．今证(*ii*)．因

$$(\overline{A\otimes B})=(\overline{a_{ij}b_{kl}})_{mp\times nq}=(\overline{b}_{kl}\cdot\overline{a}_{ij})_{mp\times nq}=(\overline{b}_{kl}\cdot a_{ij})_{mp\times nq}$$

$$=(a_{ij}\,\overline{b}_{kl})_{mp\times nq}=A\otimes\overline{B}.$$

仿此可证(i)．□

定理 1 设 $A\in Q^{m\times n}$，$B\in Q^{p\times q}$，$C\in Q^{n\times l}$，$D\in Q^{q\times t}$，如果 B，C 中有一个是 R 上的矩阵，则

$$(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD. \qquad (1)$$

证 就 $C\otimes D$ 是弱直积证之(此时 $C\in R^{n\times l}$)．记 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$C=(c_{ij})_{n\times l}$．由于 $A\otimes B$(作为分块阵)的任意第 i 行为 $(a_{i1}B,a_{i2}B,\cdots,a_{in}B)$，而 $C\otimes D$ 的任意第 j 列为

$$\begin{pmatrix}c_{1j}D\\c_{2j}D\\\vdots\\c_{nj}D\end{pmatrix},$$

故$(A\otimes B)(C\otimes D)$(作为分块阵)的(i,j)元为

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}B)(c_{kj}D)=(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj})BD$$

(因 c_{kj}都是中心元)．上式右边恰好是 $AC\otimes BD$ 的(i,j)元，故(1)式成立．□

通常 Kronecker 乘积的许多基本性质都是基于类似于(1)式的结论而得出，所以 Q 上弱直积的一些结论亦可由(1)式得出，由于两者证法相同，故仅列出其中两个结论而略去其全部证明．

推论 1 m 阶矩阵 A 和 n 阶矩阵 B 的弱直积 $A\otimes B$ 满足

$$\mathrm{tr}(A\otimes B)=\mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}B. \qquad (2)$$

当 A 与 B 都是非异阵时，$A\otimes B$ 亦非异，且

$$(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}.$$

推论 2　对 $m\times n$ 阵 A 与 $p\times q$ 阵 B，恒有

$$\operatorname{rank}(A\otimes B)=\operatorname{rank}A\cdot\operatorname{rank}B. \tag{4}$$

下面介绍弱圈积．

定义 2　设 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$，$B=(b_{ij})\in Q^{n\times n}$，称

$$A\circ B=(a_{ij}b_{ij})_{n\times n} \tag{5}$$

为 A 与 B 的圈积．如 A 与 B 中有一个是 R 上的方阵，则称 $A\circ B$ 为弱圈积．

圈积是常规矩阵论中矩阵 Hadamard 乘积的推广，通常 Hardmard 乘积的性质对弱圈积亦正确．例如，易证下面的命题．

命题 2　设 $A,B\in Q^{n\times n}$，则

$$\operatorname{rank}A\circ B\leqslant\operatorname{rank}A\cdot\operatorname{rank}B. \tag{6}$$

证明　因为 $A\circ B$ 的第 $1,2,\cdots,n$ 行与 $1,2,\cdots,n$ 列恰好分别是弱直积 $A\otimes B$ 的 $1,n+2,\cdots,n^2$ 这 n 个行与 $1,n+2,\cdots,n^2$ 这 n 个列即 $A\circ B$ 是 $A\otimes B$ 的一个主子阵，故

$$\operatorname{rank}(A\circ B)\leqslant\operatorname{rank}(A\otimes B).$$

再应用(4)式即得(6)式．□

最后我们介绍矩阵的拉直．

定义 3　设 $A=(a_{ij})\in Q^{m\times n}$．定义 $Q^{m\times n}$ 到 $Q^{mn\times 1}$ 的一个映射 σ 如下：$\sigma(A)=(x'_1,\cdots,x'_n)'=\alpha$，其中 $x'_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})$，称 $\sigma(A)$ 为矩阵 A 的拉直．

易证得 σ 是一个双射，$\sigma^{-1}(\alpha)=A$．

用弱直积和矩阵的拉直可将一些矩阵方程转化为向量方程．

注　定义 3 中矩阵 A 的拉直是将 A 的各列依次按列纵排得到的 mn 维列向量．同样，我们也可将矩阵 A 的各行依次按列纵排得到的 mn 维列向量定义为 A 的拉直．

§7 矩阵的最大公因子、可控与矩阵的范数

在矩阵方程的研究中，我们有时会用到矩阵的最大公因子、矩阵的可控及可测和矩阵的范数．本节我们将给出主理想环上矩阵的最大公因子、矩阵的右互素，含幺结合环上矩阵的可控及四元数矩阵的范数等概念．

1 主理想环上矩阵的最大公因子

设 R 是一个主理想环(PID)．我们称 $U\in R^{n\times n}$ 为幺模阵当且仅当存在 $U_1\in R^{n\times n}$ 使 $U_1U=UU_1=I$ 或等价于 U 是幺模阵$\Leftrightarrow \det U=1$(1 为 R 中的幺元)．$U\in R^{n\times n}$ 称为右幺模阵$\Leftrightarrow$存在 $U_1\in R^{m\times n}$ 使 $U_1U=I$．同理，$U\in R^{n\times n}$ 称为左幺模阵当且仅当存在 $U_1\in R^{n\times m}$ 使 $UU_1=I$．

矩阵 A,B 称为左结合，如果有幺模阵 U 使 $A=UB$．

易知 $A\in R^{n\times n}$ 是矩阵$\begin{pmatrix}G\\O\end{pmatrix}$的左结合，其中 G 是行满秩的．

若 R 上的三个矩阵有关系 $A=CG$，则称 G 为 A 的一个右因子，A 称为 G 的一个左积．

G 是 A 的一个最大右因子，如果 G 是 A 的一个右因子且是 A 的每个右因子的左积．

设 $M\in R_m^{n\times m}$，R 上的一个可逆阵 L 和一个右幺模阵 U 满足 $M=UL$，则 L 是 M 的一个最大右因子．

R 上的矩阵 A 与 B 的一个最大右公因子定义为$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$的一个最大右因子．

R 上的每对矩阵 A 和 B 一定有最大右公因子，且可表成

$$G=PA+QB$$

的形式，其中 P,Q 是 R 上的矩阵．

如果$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$是列满秩阵，则 A 和 B 有一个可逆的最大右公因子 G. 若 A 和 B 有一个可逆的最大右公因子 G，则 A 和 B 的每一个最大右公因子是如下形式 UG，其中 U 是幺模阵．

$A\in R^{n\times m}$和 $B\in R^{k\times m}$称为右互素当且仅当 A 和 B 的一个最大右公因子是幺模的．

设 U 是一个幺模阵，且

$$U\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V\\O\end{pmatrix}$$

其中$\begin{pmatrix}V\\O\end{pmatrix}$是$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$的 Hermite 行，则 $V\in R^{m\times m}$是 A 和 B 的一个最大右公因子且是幺模的充要条件是 A 和 B 是右互素的．

将 U 和 $W=U^{-1}$适当分块，立证得

$$\begin{pmatrix}V^{-1} & O\\O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_{11} & U_{12}\\U_{21} & U_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & W_{12}\\B & W_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & O\\O & I\end{pmatrix},$$

其中$\begin{pmatrix}W_{12}\\W_{22}\end{pmatrix}$是由 W 的后 $n+k-m$ 列构成．

关于 R 上的两个矩阵的一个最大左公因子及左互素及 R 上的矩阵的最大左因子可根据矩阵的转置类似定义．

R 上的矩阵 A 和 B 称为等价的当且仅当存在幺模阵 M 和 N 使 $A=MBN$.

设 $A\in R^{p\times q}$，$B\in R^{q\times r}$，称 A 和 B 为外斜素的当且仅当有 $X\in R^{q\times p}$和 $Y\in R^{r\times q}$使 $XA+BY=I$.

命题 1[11] R 上的矩阵 A 和 B 为外斜素的充要条件为存在 R 上的矩阵 $\vec{B}$和 $\vec{A}$使 $AB=\vec{B}\vec{A}$，A 和 $\vec{B}$左互素，B 和 $\vec{A}$右互素．

2 ·环上矩阵的可控

设 R 是一个含幺结合环，$A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times m}$，矩阵对(A,B)称

为可控的，如果对某一正整数 p 有 $n\times mp$ 矩阵

$$(B,AB,\cdots,A^{p-1}B)$$

是一右可逆的，即有 $Y\in R^{mp\times n}$ 使

$$(B,AB,\cdots,A^{p-1}B)Y=I.$$

如果 $(B,AB,\cdots,A^{n-1}B)$ 右可逆，则称 (A,B) 是强可控的．

注 1　当 R 是交换环时，可控与强可控是一致的．

注 2　当 R 是一个体时，可控与强可控也是一致的．事实上，设 $A\in R^{n\times n}$．考虑 R 上的右向量空间 R^n 的一系列递增的子空间

$$M_0\subseteq M_1\subseteq\cdots\subseteq R^n,$$

其中，$M_j=\mathrm{Im}(A,AB,\cdots,A^jB)$．设 j_0 是使得 $\dim M'_{j_0+1}=\dim M_{j_0}$ 成立的最小的指标，则 $M_{j_0+1}=M_{j_0}$，且易知对所有的 $j>j_0$，有 $M_j=M_{j_0}$．由 (A,B) 可控知，$M_{j_0}=R^n$．因 $\dim R^n=n$，故 $j_0\leqslant n-1$．于是 (A,B) 是强可控的．

注 3　当 R 是一个体时，(A,B) 可控当且仅当

$$\mathrm{rank}(B,AB,\cdots,A^{n-1}B)=n.$$

下面定义环 R 上矩阵的可测．

设 R 是一个含幺结合环，$A\in R^{n\times m}$，$B\in R^{m\times m}$，若对某正整数 q，矩阵

$$\begin{pmatrix}A\\AB\\\vdots\\AB^{q-1}\end{pmatrix}$$

是左可逆的，即有 $Y\in R^{m\times qn}$，使

$$Y\begin{pmatrix}A\\AB\\\vdots\\AB^{q-1}\end{pmatrix}=I,$$

则称矩阵对 (A,B) 是可测的．

如果
$$K=\begin{pmatrix} A \\ AB \\ \vdots \\ AB^{m-1} \end{pmatrix}$$
左可逆，则称(A,B)是强可测的．

注 4　当R是交换环或体时，可测与强可测是一致的；当R是除环时，上述(A,B)可测当且仅当$\text{rank}K=m$.

注 5　当R是实四元数体Q时，Q上的矩阵对(M,L)可测当且仅当(M^*,L^*)可控．

3　四元数矩阵的范数

在§1中，我们给出了广义酉空间及向量的范数的定义．

设$A\in Q^{m\times n}$，定义非负实函数$\|A\|$．若它满足下列性质：

(1)　$\|A\|\geqslant 0$，且$\|A\|=0\Leftrightarrow A=O$；

(2)　$\|aA\|=|a|\|A\|$，$a\in Q$，$|a|$是a的长度；

(3)　$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$，

则称$\|A\|$为A的范数．若对任意的$A\in Q^{m\times n}$，$B\in Q^{n\times t}$，有$\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|$，则称该范数是相容的．

例　设$A=(a_{ij})\in Q^{m\times n}$，定义
$$\|A\|=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}},\tag{1}$$
则它是一种范数，称为广义Frobenius范数．上述的范数也可写成如下形式
$$\|A\|=(\text{tr}A^*A)^{\frac{1}{2}}.\tag{2}$$
为证明(2)定义的范数是相容的，我们先证明下面的命题．

命题 2　设$A\in Q^{m\times n}$，$B\in Q^{n\times m}$，则
$$\text{Re}[\text{tr}AB]=\text{Re}[\text{tr}BA].$$

证明　设$A=(a_{st})$，$B=(b_{st})\in Q^{n\times n}$，则

$$\mathrm{tr}(AB)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{st}b_{ts}=\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{st}b_{ts},\mathrm{tr}(BA)=\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}b_{ts}a_{st}.$$

又对任意的 $a,b\in Q$，显有

$$\mathrm{Re}[ab]=\mathrm{Re}[ba],\mathrm{Re}[a+b]=\mathrm{Re}[a]+\mathrm{Re}[b],$$

故有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[\mathrm{tr}AB]&=\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{Re}[a_{st}b_{ts}]\\&=\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\mathrm{Re}[b_{ts}a_{st}]\\&=\mathrm{Re}[\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}b_{ts}a_{st}]=\mathrm{Re}[\mathrm{tr}BA].\ \square\end{aligned}$$

我们说按(2)定义的范数是相容的，即

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\ \|B\|.$$

这一点可由命题 2 及 § 1 中的(1)式和 § 1 中的命题 14 易证明．

注 6 今后在本书中四元数矩阵的范数是指按(2)定义的范数，除非特别声明．

如果 $\|A\|$ 满足如下的附加性质 $\|U_1AU_2\|=\|A\|$，这里 U_1 和 U_2 是广义酉阵，则称 $\|A\|$ 为广义酉不变范数．易知，按(2)定义的范数是广义酉不变范数．

第二章　线性矩阵方程

在本章中，我们将以第一章介绍的体与环上的矩阵论为主要工具，研究多种线性矩阵方程，给出它们有各种解的充要条件及其通解表达式.

§1　体上矩阵方程 $AX=B$ 及其反问题

众所周知，

$$AX=B \tag{1}$$

是一类非常重要的矩阵方程. 许多作者在实数域及复数域上研究过(1)的一般解、对称解、Hermite 解、(半)正定解(见〔12〕~〔18〕). 本节我们将在体上研究(1)：在任意体 Ω 上给出(1)求解的实用方法；在具有对合反自同构的体 K 上给出(1)有(次)自共轭解的充要条件及其通解表达式；在实四元数体 Q 上导出(1)有(斜)亚(半)正定解及广义酉矩阵解的充条件及其解集结构；最后给出(1)的反问题的各种解.

1　矩阵方程(1)在 Ω 上的一般解

考虑矩阵方程(1)，其中 $A\in\Omega^{m\times n}$，$B\in\Omega^{m\times s}$为已知矩阵，$X\in\Omega^{n\times s}$为未知矩阵.

下面给出(1)有解的一个充要条件.

定理 1　Ω 上的矩阵方程(1)有解的充要条件是

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(A,B)=r\quad(0\leqslant r\leqslant\min\{m,n\}).$$

证明　设 $\operatorname{rank}A=r$，则有 $P\in GL_m(\Omega)$，$Q\in GL_n(\Omega)$，使

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

令

$$Y=Q^{-1}X, PB=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix},$$

则

$$(1)\text{有解}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\text{有解}\Leftrightarrow B_2=O.$$

由第一章§2中的定理8，知，

$$\text{rank}(A,B)=\text{rank } P(A,B)\begin{pmatrix} Q & O \\ O & I_S \end{pmatrix}=\text{rank}\begin{pmatrix} I_r & O & B_1 \\ O & O & B_2 \end{pmatrix}.$$

故由第一章§2中的推论1得，

$$B_2=O\Leftrightarrow\text{rank}(A,B)=\text{rank}\begin{pmatrix} I_r & O & B_1 \\ O & O & B_2 \end{pmatrix}=r.$$

从而，

$$(1)\text{有解}\Leftrightarrow B_2=O\Leftrightarrow\text{rank}(A,B)=r=\text{rank}A.\ \square$$

定义1 称 $$A_{m\times n}X_{n\times s}=O_{m\times s} \tag{2}$$

为(1)的导出方程；而以齐次右线性方程组

$$A_{m\times n}X_{n\times 1}=O_{m\times 1} \tag{3}$$

的一个基础解系为列构成的矩阵 N 称为(2)的基础解阵.

显然，矩阵方程(1)的任意两个解之差必为其导出方程(2)的解.

容易证是下面的

引理1 设 $A\in\Omega_r^{m\times n}$，则存在 $P\in GL_m(\Omega)$ 和 $Q\in GL_n(\Omega)$ 使

$$PAQ=[D,O],$$

其中 $D\in\Omega_r^{m\times r}$.

今后，我们用 $T_{ij}(k)$ 表示将一个矩阵的第 $i(j)$ 列(行)右(左)乘以 $k\in\Omega$ 加到第 $j(i)$ 列(行)上.

定理 2 对于矩阵方程(1)，令 $\operatorname{rank}A=r$，

$$C=\begin{pmatrix} A_{mn} & -B_{ms} \\ I_n & O \end{pmatrix},$$

则

(i) C 总可经过一些初等变换(初等行变换仅对前 m 行施行，后 s 列仅施行 $T_{ij}(k)$ 且 $i<j$)化为

$$G=\begin{pmatrix} D_{mr} & O_{m(n-r)} & E_{ms} \\ M_{nr} & N_{n(n-r)} & U_{ns} \end{pmatrix},$$

其中 $D\in\Omega_r^{m\times r}$，$E_{ms}=O$ 或 $\operatorname{rank}(D,E)\geqslant r+1$；

(ii) 矩阵方程(1)有解的充要条件是 $E=O$；

(iii) G 中的 N 是(1)的导出方程的一个基础解阵；(1)有解时，G 中的 U 必为(1)的一个解.

证明 (i) 因 $\operatorname{rank}A=r$，故由引理 1 知，存在 $P_1\in GL_m(\Omega)$ 和 $Q_1\in GL_n(\Omega)$ 使

$$P_1AQ_1=[D,O] \tag{4}$$

其中 $D\in\Omega_r^{m\times r}$. 令

$$Q_1=(M_{nr},N_{n(n-r)}) \tag{5}$$

及

$$P_2=\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & I_n \end{pmatrix},Q_2=\begin{pmatrix} Q_1 & U \\ O & I_s \end{pmatrix}$$

其中 $U\in\Omega^{n\times s}$，则 P_2 及 Q_2 均可逆. 令

$$P_1AU-P_1B=E, \tag{6}$$

则由(4)～(6)式知，

$$\begin{aligned} P_2CQ_2 &=\begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ I_n & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & U \\ O & I_s \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} P_1AQ_1 & P_1AU-P_1B \\ Q_1 & U \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix} D & O & E \\ M & N & U \end{pmatrix} \xlongequal{\text{def}} G_1.$$

由 P_2,Q_2 的结构特点及第一章§2定理1、定理2知，C 总可经过一系列初等变换（初等行变换仅对前 m 行施行，后 s 列仅施行 $T_{ij}(k)$ 且 $i<j$）化为 G_1. 若 $\text{rank}(D,E)=r$，就对 G_1 继续施行上述初等变换直到化 E 为 O.

(ii)及(iii) 由(i)知，存在 $P\in GL_m(\Omega)$ 和

$$Q=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ O & I_s \end{pmatrix}\in GL_{n+s}(\Omega)$$

使

$$P(A,-B)Q=(D,O,E), \tag{7}$$
$$(I_n,O)Q=(M,N,U).$$

故 $C_1=(M,N)$ 及 $C_2=U$. 将 C_1,C_2 代入(7)式得

$$PAN=O,$$
$$PAU-PB=E. \tag{8}$$

由于 P,Q 均可逆，故 N 为(1)的导出方程的一个基础解阵. 于是，$\text{rank}(A,B)=\text{rank}(A,-B)=\text{rank}P(A,-B)Q=\text{rank}(D,O,E)$. 因 $D\in\Omega_r^{m\times r}$，$E=O$ 或 $\text{rank}(D,E)\geqslant r+1$，故

$$\text{rank}(D,O,E)=r\Leftrightarrow E=O.$$

由定理1知，(1)有解$\Leftrightarrow E=O$，若(1)有解，则 $E=O$. 由(8)式及 P 可逆知，U 是(1)的一个解. □

定理3 若矩阵方程(1)有解，则其一般解为

$$X=U+NH \tag{9}$$

其中 U 为(1)的一个特解，N 为(1)的导出方程的一个基础解阵，$H\in\Omega^{(n-r)\times s}$为任意的.

证明 因 U 为(1)的一个特解，N 为(1)的导出方程的一个基础解阵，故

$$AU=B,AN=O.$$

从而，对任意的 $H\in\Omega^{(n-r)\times s}$，有 $A(U+NH)=B$. 故(9)为(1)的解.

反之，设 X 为(1)的任一解，则 $X-U$ 为(1)的导出方程的解，即 $A(X-U)=O$. 从而，$X-U=NH$，其中 N 为(1)的导出方程的一个基础解阵，$H\in\Omega^{(n-r)\times s}$. 故 X 可表成(9)的形式. □

推论 1 若(1)有解，则

(i) $\text{rank}A=n$，有唯一解；

(ii) $\text{rank}A<n$ 时，有无穷多解.

综上，我们可得求矩阵方程(1)的通解的具体步骤：

(i) 作矩阵 $C=\begin{pmatrix}A_{mn} & -B_{ms}\\ I_n & O\end{pmatrix}$；

(ii) 对 C 作一些初等变换(初等行变换仅对前 m 施行，后 s 列仅施行 $T_{ij}(k),i<j$)化为 G 的形式. 若 $E=O$，则(1)有解，否则无解；

(iii) 若(1)有解，则 U 为(1)的一个特解，N 为(1)的导出方程的一个基础解阵. 于是，(1)的解集为 $\{U+NY\mid Y\in\Omega^{(n-r)\times s}\}$.

2 矩阵方程(1)在 K 上的(次)自共轭解

考虑矩阵方程(1)，其中 $A\in K_r^{m\times n}$，$B\in K^{m\times n}$，对于上述的 A，有 $P\in GL_m(K)$ 和 $Q\in GL_n(K)$ 使

$$PAQ=\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}. \tag{10}$$

以下恒令

$$PBQ^{-*}=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}r\\ \\ \end{matrix}\ ,\quad(\text{第一列块宽 } r) \tag{11}$$

$$N=(B_{21},B_{22}). \tag{12}$$

其中 $Q^{-*}=(Q^*)^{-1}=(Q^{-1})^*$.

引理 2　矩阵方程(1)有解当且仅当 $N=O$. 有解时,其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}Q^* \;\middle|\; X_{21}\in K^{(n-r)\times r}, X_{22}\in K^{(n-r)\times(n-r)}\right\}. \quad (13)$$

证明　设(1)有解 X,并令

$$Q^{-1}XQ^{-*}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

于是,$B_{21}=O, B_{22}=O, B_{11}=X_{11}, B_{12}=X_{12}$,此示,$X$ 具有(13)的形式,且 $N=O$.

反之,若 $N=O$,易验知具有(13)形式的 X 是(1)的一个解. □

定理 4　矩阵方程(1)有自共轭解的充要条件为 $N=O$,且 $BA^*\in SC_m(K)$. 有此种解时,其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix}Q^* \;\middle|\; X_{22}\in SC_{n-r}(K)\right\}. \quad (14)$$

证明　设 $X\in SC_n(K)$是(1)的一个解,则

$$BA^*=AXA^*\in SC_m(K).$$

由引理 2 知 $N=O$ 且 X 具有(13)的形式. 由于 $X^*=X$,故 $X_{21}=B_{12}^*, X_{22}\in SC_{n-r}(K)$. 从而,$X$ 具有(14)的形式.

反之,若 $N=O, BA^*\in SC_m(K)$,则由(10)~(12)式得

$$BA^*=P^{-1}\begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-*}\in SC_m(K).$$

故 $B_{11}\in SC_r(K)$. 从而具有(14)式形状的 $X\in SC_n(K)$. 易验知,具有(14)形式的 X 必为(1)的解. □

仿上可得(1)关于反自共轭解的结论.

定理 5　矩阵方程(1)有反自共轭解的充分必要条件为 BA^*

$\in SS_m(K)$且 $N=O$. 有此种解时，其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ -B_{12}^{*} & X_{22} \end{pmatrix}Q^{*} \,\middle|\, X_{22}\in SS_{n-r}(K)\right\}. \tag{15}$$

采用上面的方法，我们可给出矩阵方程(1)有次(反)自共轭解的充要条件及其解集结构．

以下令

$$PBQ^{-(*)}=\begin{array}{c@{}c} \begin{array}{cc} & r \end{array} & \\ \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} r \\ \ \end{matrix} \end{array},$$

$$M=(B_3, B_4).$$

引理 3　矩阵方程(1)有解当且仅当 $M=O$. 有解时，其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}Q^{(*)} \,\middle|\, X_3\in K^{(n-r)\times(n-r)}, X_4\in K^{(n-r)\times r}\right\}.$$

可由引理 3 证得下面的

定理 6　矩阵方程(1)有次自共轭解的充要条件为 $M=O$ 且 $BA^{(*)}\in H_m(K)$. 有此种解时，其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ X_3 & B_1^{(*)} \end{pmatrix}Q^{(*)} \,\middle|\, X_3\in H_{(n-r)}\right\}.$$

定理 7　矩阵方程(1)有次反自共轭解的充要条件为 $M=O$ 且 $BA^{(*)}\in S_m(K)$. 有此种解时，其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ X_3 & -B_1^{(*)} \end{pmatrix}Q^{(*)} \,\middle|\, X_3\in S_{n-r)}(K)\right\}.$$

3　矩阵方程(1)的(斜)亚(半)正定解

本段考虑矩阵方程(1)的(斜)亚(半)正定解．令 $K=Q$.

定理 8　矩阵方程(1)有亚半正定解的充要条件为 $N=O$，且 $BA^{*}\in SP_m^{*}$. 有此种解时，其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ -B_{12}^{*}+U(B_{11}+B_{11}^{*}) & D+UB_{11}U^{*} \end{pmatrix}Q^{*} \;\middle|\; D\in SP_{n-r}^{*}, U\in Q^{(n-r)\times r}\right\} \quad (16)$$

证明 设 $X\in SP_n^{*}$ 为(1)的一个解,则由引理 2 知,$N=O$. 又 $BA^{*}=AXA^{*}\in SP_m^{*}$. X 具有(13)的形式. 由第一章 § 3 的命题 5 知,

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\in SP_n^{*}.$$

由第一章 § 3 的定理 8 知,矩阵方程 $X(B_{11}+B_{11}^{*})=X_{21}+B_{12}^{*}$有解且 $B_{11}, X_{22}-UB_{11}U^{*}\overset{\text{def}}{=\!=}D$ 均为亚半正定矩阵,其中 U 为上述矩阵方程的任意解. 从而,

$$X_{21}=U(B_{11}+B_{11}^{*})-B_{12}^{*}, X_{22}=D+UB_{11}U^{*}.$$

故 X 可表成(16)的形式.

反之,设 $N=O$,且 $BA^{*}\in SP_m^{*}$,由(10)~(12)式,

$$BA^{*}=P^{-1}\begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix}P^{-*}.$$

由第一章 § 3 的定理 8 知,B_{11}为亚半正定阵. 从而具有(16)形式的 X 必为亚半正定阵. 易验知,具有(16)形式的 X 是(1)的解.

推论 2 (1)有亚正定解的充要条件为 $BA^{*}\in P_m^{*}$. 有此种解时,其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ -B_{12}^{*}+U(B_{11}+B_{11}^{*}) & D+UB_{11}U^{*} \end{pmatrix}Q^{*} \;\middle|\; D\in P_{n-r}^{*}, U\in Q^{(n-r)\times r}\right\}.$$

定理 9 矩阵方程(1)有斜亚半正定解的充要条件为 $M=O$ 且 $BA^{(*)}\in SP_m^{(*)}$. 有此种解时,其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix} B_{1} & B_{2} \\ D+U^{(*)}B_{2}U & -B_{1}^{(*)}+U(B_{2}+B_{2}^{(*)}) \end{pmatrix}Q^{(*)} \;\middle|\; D\in SP_{n-r}^{(*)}, U\in Q^{r\times(n-r)}\right\}.$$

推论 3 矩阵方程(1)有斜亚正定解的充要条件为 $M=O$,且 $BA^{(*)}\in P_m^{(*)}$. 有此种解时,其解集为

$$\left\{ Q\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ D+U^{(*)}B_2U & -B_1^{(*)}+U^{(*)}(B_2+B_2^{(*)}) \end{pmatrix} Q^{(*)} \middle| D\in P_{n-r}^{(*)}, U\in Q^{r\times(n-r)} \right\}.$$

4　矩阵方程(1)的广义酉矩阵解

本段我们考虑矩阵方程(1)的广义酉矩阵解，其中 $A\in Q_r^{m\times n}$，$B\in Q^{m\times n}$. 记 $Q_\perp^{t\times n}=\{A\in Q^{t\times n}\mid AA^*=I_t\}$.

对于 $U\in Q_\perp^{t\times n}$，易见存在不唯一的 $U_\perp\in Q^{(n-t)\times n}$ 使

$$\begin{pmatrix} U \\ U_\perp \end{pmatrix}\in Q_\perp^{n\times n}.$$

此时，称 U 与 $U_\perp$ 互为广义酉正交补.

对于 $A\in Q_r^{m\times n}$，由第一章 §4 中的定理 2，存在可逆阵 P 和 Q，使

$$A=P\begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^*, \tag{17}$$

其中

$$D=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_r), \sigma_i>0, i=1,\cdots,r.$$

以下令

$$P^*BQ=\begin{pmatrix} M \\ L \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}. \tag{18}$$

定理 10　矩阵方程(1)有广义酉矩阵解的充要条件为 $AA^*=BB^*$. 有此种解时，其一般解为

$$X=Q\begin{pmatrix} D^{-1}M \\ V \end{pmatrix}Q^*, \tag{19}$$

其中 V 为 $D^{-1}M$ 的任一广义酉正交补.

证明　设(1)有广义酉矩阵解 X，则

$$BB^*=AXX^*A^*=AA^*.$$

令 $X=Q\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}Q^*$，其中 $C_1\in Q^{r\times n}$，则由(17)、(18)可得 $C_1=D^{-1}M$.

由 $X\in Q_{\perp}^{n\times n}$ 知，$C_2=C_{1\perp}$．故 X 具有(19)的形式．

反之，设 $AA^*=BB^*$，则由(17)及(18)式知，$L=O$，$D^2=MM^*$．从而，

$$B=P\begin{pmatrix}M\\O\end{pmatrix}Q^*,(D^{-1}M)(D^{-1}M)^*=I_r.$$

于是，$D^{-1}M\in Q_{\perp}^{r\times n}$．故具有(19)形式的 X 必为广义酉矩阵．易检知(19)为(1)之解．□

5　矩阵方程(1)的反问题的各种解

自文[36]提出实数域上的线性方程组 $Ax=b$ 的反问题以来，此反问题一直是人们研究的热门课题．文[36—40]分别给出了其正定对称解与对称矩阵解、(反)Hermite 矩阵解及半正定 Hermite 矩阵解的某些解法及解集结构，文[41—43]推广并改进了上述反问题及一系列结果，解决了体上线性方程组更具广泛性的一类反问题，文[30,31,44]又相继提出了复数域上的矩阵反问题．本段推广并改进了所有上述反问题，解决了矩阵方程(1)的反问题；给定实四元数矩阵 X 和 B，求四元数矩阵 A，使 $AX=B$，给出了此反问题一般解的实用求法，有(次)自共轭解，(斜)亚(半)正定解及广义酉矩阵解的充要条件及其解集结构．它们的证明读者可仿上完成．

先考虑矩阵方程(1)之反问题(简称 IP)的一般解，其中 $X\in\Omega_r^{n\times s}$，$B\in\Omega^{m\times s}$ 为已知阵，$A\in\Omega^{m\times n}$ 为未知阵．

定理 11　令

$$C=\begin{pmatrix}X_{ns} & I_n\\ -B_{ms} & O\end{pmatrix},$$

对 C 作一系列初等变换(初等列变换仅对前 s 列施行，$T_{ij}(k)$ 当 $i>n$，$j<i$)化为

$$G=\begin{pmatrix} D_{rs} & M_{rn} \\ O & N_{(n-r)n} \\ E_{ms} & U_{mn} \end{pmatrix},$$

其中 $D\in\Omega_r^{r\times s}$，$E=O$ 或 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}D\\E\end{pmatrix}\geqslant r+1$. 若 G 中的 E 为零阵 O，则 IP 有解，否则无解；有解时，IP 的解集为 $\{U+HN \mid H\in \Omega^{m\times(n-r)}\}$.

下面考虑 IP 的(次)自共轭解等，其中 $X\in K_r^{n\times m}$，$B\in K^{n\times m}$，我们要求如下集合：

$S_1=\{A\in SC_n(K)\mid AX=B, X\in K_r^{n\times m}, B\in K^{n\times m}\}$，

$S_2=\{A\in SS_n(K)\mid AX=B, X\in K_r^{n\times m}, B\in K^{n\times m}\}$，

$S_3=\{A\in H_n(K)\mid AX=B, X\in K_r^{n\times m}, B\in K^{n\times m}\}$，

$S_4=\{A\in S_n(K)\mid AX=B, X\in K_r^{n\times m}, B\in K^{n\times m}\}$.

对于 $X\in K_r^{n\times m}$，有 $S\in GL_n(K)$ 和 $T\in GL_m(K)$ 使

$$SXT=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

令

$$S^{-*}BT=\overset{\quad r \quad\ m-r}{\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix},$$

$$M_1=\begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{pmatrix},$$

$$S^{-(*)}BT=\overset{r}{\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}}\begin{matrix} r \\ \ \end{matrix},$$

$$N_1=\begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \end{pmatrix},$$

则有如下的

定理 12 (i) S_1 非空$\Leftrightarrow M_1=O$ 且 $X^* B\in SC_m(K)$.
当 S_1 非空时,

$$S_1=\left\{S^*\begin{pmatrix}B_{11} & B_{21}^*\\ B_{21} & A_{22}\end{pmatrix}S\,\middle|\,A_{22}\in SC_{n-r}(K)\right\};$$

(ii) S_2 非空$\Leftrightarrow M_1=O$ 且 $X^* B\in SS_m(K)$.
当 S_2 非空时,

$$S_2=\left\{S^*\begin{pmatrix}B_{11} & -B_{21}^*\\ B_{21} & A_{22}\end{pmatrix}S\,\middle|\,A_{22}\in SS_{n-r}(K)\right\};$$

(iii) S_3 非空$\Leftrightarrow N_1=O$ 且 $X^{(*)}B\in H_m(K)$.
当 S_3 非空时,

$$S_3=\left\{S^{(*)}\begin{pmatrix}B_1 & A_{21}\\ B_3 & B_1^{(*)}\end{pmatrix}S\,\middle|\,A_{21}\in H_r(K)\right\};$$

(iv) S_4 非空$\Leftrightarrow N_1=O$ 且 $X^{(*)}B\in S_m(K)$.
当 S_4 非空时,

$$S_4=\left\{S^{(*)}\begin{pmatrix}B_1 & A_{21}\\ B_3 & -B_1^{(*)}\end{pmatrix}S\,\middle|\,A_{21}\in S_r(K)\right\}.$$

最后,我们考虑 IP 的广义酉矩阵解,其中 $X\in Q_r^{n\times m}$, $B\in Q^{n\times m}$. 即求集合

$S_5=\{A\in Q_\perp^{n\times n}\mid AX=B, X\in Q_r^{n\times m}, B\in Q^{n\times m}\}$.

对于 $X\in Q_r^{n\times m}$,由第一章 §4 中的定理 2,有 n 阶和 m 阶广义酉矩阵 V 和 W,使

$$X=V\begin{pmatrix}C & O\\ O & O\end{pmatrix}W^*,$$

其中 $C=\mathrm{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}},\cdots,\lambda_r^{\frac{1}{2}})$, $\lambda_i(i=1,\cdots,r)$ 为 XX^* 的正特征根. 令 $V^* BW=(T_1,T_2)$,其中 $T_1\in Q^{n\times r}$,则有下面的

定理 13 S_5 非空$\Leftrightarrow X^* X=B^* B$. 当 S_5 非空时,

$S_5=\{V(T_1C^{-1},(T_1C^{-1})^\perp)V^*\mid (T_1C^{-1})^\perp\in Q_\perp^{n\times(n-r)}\}$.

§2 体上的矩阵方程 $AXA^*=B$ 与 $AXA^{(*)}=B$

在本节中，我们研究矩阵方程

$$AXA^*=B, \tag{1}$$

及

$$AXA^{(*)}=B, \tag{2}$$

在 K 上给出(1)有自共轭解、(2)有次自共轭解的充要条件及其通解表达式；在 Q 上导出(1)有亚(半)正定解、(2)有斜亚(半)正定解的充要条件及其解集结构．

1 矩阵方程(1)的自共轭解

考虑矩阵方程(1)，其中 $A\in K_r^{m\times n}$，$B\in K^{m\times m}$. 对于上述的 A，有 $P\in GL_m(K)$，$Q\in GL_n(K)$使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}. \tag{3}$$

令

$$PBP^*=\begin{array}{c} \begin{matrix} r & n-r \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \end{array}\begin{matrix} \\ r \\ n-r \end{matrix}, \tag{4}$$

引理 1 矩阵方程(1)有解的充要条件为 $B_{12}=O$，$B_{21}=O$ 及 $B_{22}=O$. 有解时，其解集为

$$\left\{ Q\begin{pmatrix} B_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}Q^* \,\middle|\, X_{12}\in K^{r\times(n-r)}, X_{21}\in K^{(n-r)\times r}, X_{22}\in K^{(n-r)\times(n-r)} \right\}. \tag{5}$$

证明 矩阵方程(1)等价于

$$PAQQ^{-1}XQ^{-*}Q^*A^*P^*=PBP^*.$$

若(1)有解 X，令

$$Q^{-1}XQ^{-*}=\begin{array}{c} \begin{matrix} r & n-r \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

从而，$B_{11}=X_{11}, B_{12}=O, B_{21}=O, B_{22}=O$. 此示，$X$ 具有(5)的形式.

反之，若 $B_{12}=O, B_{21}=O, B_{22}=O$，易验知，具有(5)形式的 X 一定为(1)的解. □

定理 1 矩阵方程(1)有自共轭解的充要条件为 $B\in SC_m(K)$ 且 $B_{12}=O, B_{22}=O$. 有此种解时，其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix} B_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix}Q^* \;\middle|\; X_{12}\in K^{r\times(n-r)}, X_{22}\in SC_{n-r}(K)\right\}. \tag{6}$$

证明 设 $X\in SC_n(K)$ 是(1)的一个解，则

$$B=AXA^*\in SC_m(K),$$

且由引理 1 知，$B_{12}=O, B_{22}=O$，X 具有(5)的形式，但 $X\in SC_n(K)$，故 $X_{21}=X_{12}^*, X_{22}\in SC_{n-r}(K)$. 从而，$X$ 具有(6)的形式.

反之，若 $B\in SC_m(K)$ 且 $B_{12}=O, B_{22}=O$，则 $B_{21}=O$，$B_{11}\in SC_r(K)$. 由引理 1 知，(1)有形如(5)的解，令

$$X_{21}=X_{12}^*, X_{22}\in SC_{n-r}(K),$$

则

$$X=Q\begin{pmatrix} B_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix}Q^*\in SC_n(K).$$

易验知上述 X 为(1)的解. □

同理可证下面的

定理 2 矩阵方程(1)有反自共轭解当且仅当 $B\in SS_m(K)$ 且 $B_{12}=O, B_{22}=O$. 有此解时，其解集为

$$\left\{ Q\begin{pmatrix} B_{11} & X_{12} \\ -X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix} Q^* \middle| X_{12} \in K^{r\times(n-r)}, X_{22} \in SS_{n-r}(K) \right\}.$$

2 矩阵方程(1)的亚(半)正定解

令 $K=Q$.

定理 3 矩阵方程(1)有亚半正定解当且仅当 $B\in SP_m^*$ 且 $B_{12}=O, B_{21}=O$ 及 $B_{22}=O$. 有此种解时,其解集为

$$\left\{ Q\begin{pmatrix} B_{11} & X_{12} \\ -X_{12}^*+U(B_{11}+B_{11}^*) & D+UB_{11}U^* \end{pmatrix} Q^* \right.$$
$$\left| D\in SP_{n-r}^*, U\in Q^{(n-r)\times r}, X_{12}\in Q^{r\times(n-r)} \right\}. \tag{7}$$

证明 设 $X\in SP_n^*$ 为(1)的一个解,则 $AXA^*=B\in SP_m^*$. 又由引理 1 知,$B_{12}=O, B_{21}=O, B_{22}=O$ 且 X 具有(5)的形式. 由第一章§3 的命题 5,

$$\begin{pmatrix} B_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \in SP_n^*.$$

由第一章§3 定理 8 知,矩阵方程 $X(B_{11}+B_{11}^*)=X_{21}+X_{12}^*$ 关于 X 有解,且 $B_{11}, X_{22}-UB_{11}U^* \xlongequal{\text{def}} D$ 均为亚半正定阵,其中 U 为上述矩阵方程的任一解. 从而,

$$X_{21}=U(B_{11}+B_{11}^*)-X_{12}^*, X_{22}=D+UB_{11}U^*.$$

故 X 可表成(7)的形式.

反之,设 $B\in SP_m^*, B_{12}=O, B_{21}=O, B_{22}=O$,则由(4)知,

$$B=P^{-1}\begin{pmatrix} B_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-*}.$$

从而,B_{11} 为亚半正定阵. 再由第一章§3 的定理 8 及命题 5 知,具有(7)形式的 X 必为亚半正定阵,且易验知(7)必为(1)的解. □

推论 1 矩阵方程(1)有亚正定解当且仅当 $B_{11}\in P_r^*$ 且 $B_{12}=O, B_{21}=O, B_{22}=O$. 有此种解时,其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix} B_{11} & X_{12} \\ -X_{12}^{*}+U(B_{11}+B_{11}^{*}) & D+UB_{11}U^{*} \end{pmatrix}Q^{*}\right.$$

$$\left. \middle| D\in P_{n-r}^{*}, U\in Q^{(n-r)\times r}, X_{12}\in Q^{r\times(n-r)}\right\}.$$

注 本章§1中(10)式及§2中(3)式中的可逆阵 P 和 Q 可这样求得:对矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{mn} & I_m \\ I_n & O \end{pmatrix}$$

的前 m 行和前 n 列作初等变换化为如下形式

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} & P \\ Q & O \end{bmatrix},$$

则 P,Q 即为所求的可逆阵.

3 矩阵方程(2)的次自共轭解与斜亚(半)正定解

对于 $A\in K_r^{m\times n}$ 和 $B\in K^{m\times m}$,有 $P\in GL_m(K)$ 和 $V\in GL_n(K)$ 使

$$PAV=\begin{pmatrix} O & I_r \\ O & O \end{pmatrix},$$

令

$$PBP^{(*)}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}.$$

（列块宽度分别为 $m-r$, r）

引理 2 矩阵方程(2)相容当且仅当 $B_{11}=O, B_{21}=O$ 及 $B_{22}=O$. 有解时,其解集为

$$\left\{V\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ B_{12} & X_{22} \end{pmatrix}V^{(*)} \middle| X_{11}\in K^{(n-r)\times r}, X_{12}\in K^{(n-r)\times(n-r)}, X_{22}\in K^{r\times(n-r)}\right\}.$$

由引理 2 及 $Ch1$ §3 中的命题 10 易证得

定理 4 矩阵方程(2)有次自共轭解当且仅当 B_{11}, B_{21}, B_{22} 皆为零阵,且 $B\in H_m(K)$. 有此解时,其解集为

$$\left\{ V\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ B_{12} & X_{11}^{(*)} \end{pmatrix} V^{(*)} \middle| X_{11} \in K^{(n-r)\times r}, X_{12} \in H_{n-r}(K) \right\}.$$

定理 5 矩阵方程(2)有次反自共轭解当且仅当 B_{11}, B_{21}, B_{22} 皆为零阵，且 $B \in S_m(K)$. 有此解时，其解集为

$$\left\{ V\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ B_{12} & -X_{11}^{(*)} \end{pmatrix} V^{(*)} \middle| X_{11} \in K^{(n-r)\times r}, X_{12} \in S_{n-r}(K) \right\}.$$

由第一章 § 3 中的命题 16 及定理 15，可证得

定理 6 矩阵方程(2)有斜亚半正定解当且仅当 B_{11}, B_{21}, B_{22} 皆为 Q 上的零阵，且 $B \in SP_m^{(*)}$. 有此种解时，其解集为

$$\left\{ V\begin{pmatrix} X_{11} & D+U^{(*)}B_{12}U \\ B_{12} & -X_{11}^{(*)}+(B_{12}+B_{12}^{(*)})U \end{pmatrix} V^{(*)} \right.$$
$$\left. \middle| X_{11} \in Q^{(n-r)\times r}, D \in SP_{n-r}^{(*)}, U \in Q^{r\times(n-r)} \right\}.$$

推论 2 (2)有斜亚正定解当且仅当 B_{11}, B_{21}, B_{22} 皆为零阵，且 $B_{12} \in P_r^{(*)}$. 有此种解时，其解集为

$$\left\{ V\begin{pmatrix} X_{11} & D+U^{(*)}B_{12}U \\ B_{12} & -X_{11}^{(*)}+(B_{12}+B_{12}^{(*)})U \end{pmatrix} V^{(*)} \right.$$
$$\left. \middle| X_{11} \in Q^{(n-r)\times r}, D \in P_{n-r}^{(*)}, U \in Q^{r\times(n-r)} \right\}.$$

需要说明的是，我们尚可利用矩阵的广义逆来研究矩阵方程(1)和(2). 请读者证明下面的

定理 7 设 $A \in Q^{m\times n}, B \in SC_m(Q)$，则

(i) 矩阵方程(1)有自共轭解的充要条件是有 $A^{(1)}$ 使得

$$AA^{(1)}B(A^{(1)})^*A^* = B.$$

在此条件下，(1)的一般自共轭解为

$$X = A^{(1)}B(A^{(1)})^* + Y - A^{(1)}AYA^*(A^{(1)})^*,$$

其中 $Y \in SC_n(Q)$ 是任意的.

(ii) (1)有解 $X \in SP_n$ 的充要条件是

$$B \in SP_n \text{ 且 } R(B) \subseteq R(A).$$

有此种解时，其通解为

$$X=(A^{(1)}C+(I_n-A^{(1)}A)E)(A^{(1)}C+(I_n-A^{(1)}A)E)^*,$$

其中 $C\in Q^{m\times n}$ 满足 $CC^*=B$，$E\in Q^{n\times n}$，$A^{(1)}$ 为 A 的任一确定的{1}逆．

§3 体与环上的矩阵方程 $AXB=C$

本节我们将在体与环上研究矩阵方程

$$AXB=C \tag{1}$$

在任意体 Ω 上给出(1)的实用解法，在单 Artinian 环及主理想环上导出(1)可解的充要条件，在正则环上给出通解的表达式，在具有对合反自同构的体 K 上研究(1)有(次)自共轭解的充要条件及其解集结构，在实四元数体 Q 上给出(1)有(斜)亚(半)正定解的充要条件及其解的表示式．

1 矩阵方程(1)在 Ω 上的一般解

我们先引入下面的

定义 1 交换单位阵的两行(列)所得的矩阵称为第一类初等阵；第一类初等阵的乘积阵称为交换阵．

Ω 上的全体 $n\times n$ 交换阵记为 $C_n(\Omega)$．

引理 1 (i)对于 $A\in C_n(\Omega)$，有 $A^{-1}=A'$．

(ii) $X\in\Omega^{m\times n}$，$P\in C_m(\Omega)$，$Q\in C_n(\Omega)$，有

$$(PXQ)'=Q'X'P'.$$

引理 2 设 $A\in\Omega_{r_1}^{r_1\times n}$，$B\in\Omega_{r_2}^{s\times r_2}$，则有

$$P_1\in GL_{r_1}(\Omega),Q_1\in C_n(\Omega),P_2\in GL_{r_2}(\Omega),Q_2\in C_s(\Omega),$$

使得

$$P_1AQ_1=(I_{r_1},A_1),Q_2BP_2=\begin{pmatrix}I_{r_2}\\B_1\end{pmatrix}.$$

引理 3 设 $A\in\Omega_{r_1}^{m\times n}, B\in\Omega_{r_2}^{s\times t}$，则必定有 $P_1\in GL_m(\Omega), Q_1\in GL_t(\Omega)$，使得

$$P_1A=\begin{pmatrix}D_{r_1n}\\O\end{pmatrix}, BQ_1=(M_{sr_2},O).$$

证明 由于 $\mathrm{rank}A=r_1$，故有 $P_1\in GL_m(\Omega), P_2\in GL_n(\Omega)$，使得

$$P_1AP_2=\begin{pmatrix}I_{r_1}&O\\O&O\end{pmatrix}.$$

从而，

$$P_1A=\begin{pmatrix}I_{r_1}&O\\O&O\end{pmatrix}P_2^{-1}=\begin{pmatrix}I_{r_1}&O\\O&O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_{r_1n}\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D_{r_1n}\\O\end{pmatrix}.$$

同理可证另一等式．□

下面考虑矩阵方程(1)，其中 $A\in\Omega^{m\times n}, B\in\Omega^{s\times t}, C\in\Omega^{m\times t}$为已知阵，$X$ 是 Ω 上的未知矩阵．我们先考虑 Ω 上的一类特殊的矩阵方程．

定理 1 设 $D\in\Omega_{r_1}^{r_1\times n}, M\in\Omega_{r_2}^{s\times r_2}, C_1\in\Omega^{r_1\times r_1}$，则矩阵方程

$$DXM=C_1 \tag{2}$$

一定有解．

证明 令

$$G=\begin{pmatrix}X'&M\\D&C_1\end{pmatrix}.$$

由引理 2、第一章 § 2 中的定理 1 与定理 2 知，对 G 的后 r_1 行和后 r_2 列分别作一系列初等行和初等列变换，必要时，分别交换 G 的前 n 列和前 s 行，则 G 总可化为如下形式：

$$\begin{pmatrix}Y'_1&Y'_3&I_{r_2}\\Y'_2&Y'_4&B_1\\I_{r_1}&A_1&C_0\end{pmatrix},$$

即有可逆阵 P_1, P_2 和交换阵 Q_1, Q_2 使得

$$P_1 D Q_1 = (I_{r_1}, A_1), Q_2 M P_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} \\ B_1 \end{pmatrix}, P_1 C_1 P_2 = C_0,$$

$$Q_2 X' Q_1 = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}'.$$

从而，$C_1 = P_1^{-1} C_0 P_2^{-1}$. 由引理 1 知，

$$Q'_1 X Q'_2 = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def.}}{=\!=} Y,$$

即 $Q_1^{-1} X Q_2^{-1} = Y$. 取 $Y_1 = C_0 - A_1 Y_3 - Y_2 B_1 - A_1 Y_4 B_1$，则

$P_1 D Q_1 Y Q_2 M P_2$

$$= (I_{r_1}, A_1) \begin{pmatrix} C_0 - A_1 Y_3 - Y_2 B_1 - A Y_4 B_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_2} \\ B_1 \end{pmatrix} = C_0.$$

从而，

$$D Q_1 Y Q_2 M = P_1^{-1} C_0 P_2^{-1} = C_1.$$

于是，$X = Q_1 Y Q_2$，即为(2)的解．这里 Y 中的 $Y_i (i=2,3,4)$ 分别为 F 上相应阶数的任意矩阵．□

定理 2 设矩阵方程中的 A, B, C 分别为

$$A = \begin{pmatrix} D_{r_1 n} \\ O \end{pmatrix}, B = (M_{sr_2}, O), C = \begin{matrix} & r_2 & t-r_2 & \\ & \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} r_1 \\ m-r_1 \end{matrix} \end{matrix},$$

其中 $r_1 = \text{rank} A$, $r_2 = \text{rank} B$, $C_1 \in \Omega^{r_1 \times r_2}$，则

(i) (1)有解当且仅当 C_2, C_3 和 C_4 均为零矩阵；

(ii) 若(1)有解，则(1)与(2)同解．

证明 由

$$\begin{pmatrix} D_{r_1 n} \\ O \end{pmatrix} X (M_{sr_2}, O) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

得

$$\begin{pmatrix} D_{r_1n}XM_{sr_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

显然，(1)有解当且仅当 $C_2=O, C_3=O, C_4=O$，且 $D_{r_1n}XM_{sr_2}=C_1$ 有解．由定理 1 知，(2)一定有解．从而(1)有解当且仅当 $C_2=O$，$C_3=O$ 及 $C_4=O$.

若(1)有解，则(1)与(2)同解是显然的．□

由引理 3，矩阵方程(1)中的 A 与 B 总可分别经过一系列初等行变换和初等列变换分别化为 $\begin{pmatrix} D_{r_1n} \\ O \end{pmatrix}$ 和 (M_{sr_2}, O) 的形式．再由定理 1 和定理 2 可得下面的

定理 3 对于矩阵方程(1)，令

$$G_0=\begin{pmatrix} O & B \\ A & C \end{pmatrix},$$

则

(i) 对 G_0 的后 m 行和后 t 列分别作初等行和初等列变换，总可化为如下形式

$$N_1=\begin{pmatrix} O & M_{sr_2} \\ D_{r_1n} & C_1 \end{pmatrix} \text{或 } N_2=\begin{pmatrix} O & M_{sr_2} & O \\ D_{r_1n} & C_1 & C_2 \\ O & C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

其中，$r_1=\text{rank}A$，$r_2=\text{rank}B$. 若 N_1 出现，则(1)一定有解；若 N_2 出现，则(1)有解当且仅当 C_2, C_3, C_4 均为零矩阵．

(ii) 当(1)有解时，令 $X=(x_{ij})_{ns}$，作矩阵

$$G=\begin{pmatrix} I_s & X' & M_{sr_2} \\ O & D_{r_1n} & C_1 \\ O & I_n & O \end{pmatrix},$$

对 G 的子阵 (D_{r_1n}, C_1) 作一系列初等行变换，必要时交换 $\begin{pmatrix} X' \\ D_{r_1n} \\ I_n \end{pmatrix}$ 的

列；对$\begin{pmatrix} M_{sr_2} \\ C_1 \end{pmatrix}$作一系列初等列变换，必要时交换 G 的前 s 行，总可化为

$$\begin{pmatrix} Q_2 & \begin{pmatrix} Y'_1 & Y'_3 \\ Y'_2 & Y'_4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} I_{r_2} \\ B_1 \end{pmatrix} \\ O & (I_{r_1} \quad A_1) & C_0 \\ O & Q_1 & O \end{pmatrix},$$

取

$$Y_1 = C_0 - A_1 Y_3 - Y_2 B_1 - A_1 Y_4 B_1, Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix},$$

则 $X = Q_1 Y Q_2$ （其中 Y_2, Y_3, Y_4 为 Ω 上的相应阶数的任意阵）即为(1)的一般解．

例1 在实四元数体 Q 上解矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i+j & i+j+k \\ 0 & 3k & 1 \\ 1 & 1+i+j+3k & 1+i+j+k \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} i+2j & \frac{1}{2}i+j \\ 2 & 1 \\ 3+i-k & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+i+k & 3 \\ -1 & 1+j \end{pmatrix}.$$

解

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} & O & & i+2j & \frac{1}{2}i+j \\ & & & 2 & 1 \\ & & & 3+i-k & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}k \\ \hdashline 1 & 1+i+j & i+j+k & 0 & 1 \\ 0 & 3k & 1 & 1+i+k & 3 \\ 1 & 1+i+j+3k & 1+i+j+k & -1 & 1+j \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[T_{45}(-\frac{1}{2})]{T_{64}(-1),T_{65}(-1)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c:c} & O & & i+2j & 0 \\ & & & 2 & 0 \\ & & & 3+i-k & 0 \\ \hdashline 1 & 1+i+j & i+j+k & 0 & 1 \\ 0 & 3k & 1 & 1+i+k & \frac{5}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}k \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -2-i-k & -2+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}k+j \end{array}\right)$$

因 $C_2=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}k \end{pmatrix} \neq O$，故题设方程无解．

例 2 解 Q 上的矩阵方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i+j & i+j+k \\ i & -1+i+k & -1+k-j \\ j & -1+j-k & -1+i-k \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} i+2j & 2i-j \\ 2 & 2k \\ 3+i-k & 1-j+3k \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2+j-k & 1+i+2k \\ 2i+j+k & -1+i-2j \\ -1-i+2j & 2i+j-k \end{pmatrix}.$$

解

$$
\left(\begin{array}{ccc:cc}
 & & & i+2j & 2i-j \\
 & O & & 2 & 2k \\
 & & & 3+i-k & 1-j+3k \\
\hdashline
1 & 1+i+j & i+j+k & 2+j-k & 1+i+2k \\
i & -1+i+k & -1+k-j & 2i+j+k & -1+i-2j \\
j & -1+j-k & -1+i-k & -1-i+2j & 2i+j-k
\end{array}\right)
\xrightarrow[T_{45}(-k)]{T_{54}(-i)T_{64}(-j)}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc:c:c}
 & & & i+2j & 0 \\
 & O & & 2 & 0 \\
 & & & 3+i-k & 0 \\
\hdashline
1 & 1+i+j & i+j+k & 2+j-k & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

因 C_2,C_3,C_4 均为零阵，故题设方程有解，作矩阵

$$
\left(\begin{array}{ccc:ccc:c}
1 & 0 & 0 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & i+2j \\
0 & 1 & 0 & x_{12} & x_{22} & x_{32} & 2 \\
0 & 0 & 1 & x_{13} & x_{23} & x_{33} & 3+i-k \\
\hdashline
 & & & 1 & 1+i+j & i+j+k & 2+j-k \\
\cdashline{4-6}
 & O & & 1 & 0 & 0 & \\
 & & & 0 & 1 & 0 & O \\
 & & & 0 & 0 & 1 &
\end{array}\right)
\xrightarrow[T_7(\frac{1}{2})]{T_{12}}
$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc:c}
0 & 1 & 0 & x_{12} & x_{22} & x_{32} & 1 \\
1 & 0 & 0 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & \frac{1}{2}i+j \\
0 & 0 & 1 & x_{13} & x_{23} & x_{33} & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}k \\
\hdashline
 & & & 1 & 1+i+j & i+j+k & 1+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k \\
\cdashline{4-6}
 & O & & 1 & 0 & 0 & \\
 & & & 0 & 1 & 0 & O \\
 & & & 0 & 0 & 1 &
\end{array}\right)$$

于是,

$$Q_1=I_3, A_1=(1+i+j, i+j+k), C_0=1+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k,$$

$$B_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}i+j \\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}k \end{pmatrix}, Q_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y'_3=(x_{22}, x_{32})$$

$$Y'_2=\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{13} \end{pmatrix},$$

$$Y'_4=\begin{pmatrix} x_{21} & x_{31} \\ x_{23} & x_{33} \end{pmatrix}$$

取 $Y'_1=C_0-A_1Y_3-Y_2B_1-A_1Y_4B_1$,于是所求的通解为

$$X=Q_1YQ_2=\begin{pmatrix} x_{11} & Y_1 & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

其中 $x_{i1}, x_{i3}(i=1,2,3)$ 及 $x_{22}, x_{32}\in Q$ 均为任意的.

特别地,取 Y_2, Y_3 及 Y_4 均为零阵,则 $Y_1=C_0$,于是,题设方程的一个特解为

$$X_0=\begin{pmatrix}0 & 1+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}k & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

2 (1)在单 Artinian 环与主理想环上可解的条件

设 R 是一个单 Artinian 环,则由第一章§2中的定理5知,R 与体 Ω 上的全矩阵环 $\Omega^{t\times t}$ 同构.

引理4 Ω 上的矩阵方程 $XB=C$ 可解的充要条件为

$$\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B\\ C\end{pmatrix}.$$

此引理可仿本章§1的定理1的证明完成.

引理5 R 上的矩阵方程 $AX=B$ 有解当且仅当 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(A,B)$;$XB=C$ 有解当且仅当 $\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B\\ C\end{pmatrix}$.

证明 矩阵方程 $AX=B$ 有解当且仅当 $A_\Omega X_\Omega=B_\Omega$ 有解;$XB=C$ 有解$\Leftrightarrow X_\Omega B_\Omega=C_\Omega$ 有解,故由§1的定理1、引理4及第一章§2中的定义6,立得引理5的证明.□

下面考虑矩阵方程(1),其中 $A\in R^{m\times n}$,$B\in R^{s\times t}$,$C\in R^{m\times t}$.

定理4 R 上的矩阵方程(1)有解的充要条件是

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(A,C)\text{且}\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B\\ C\end{pmatrix}.$$

证明 设 X_0 满足 $AX_0B=C$,则 X_0B 为 $AX=C$ 的一个解.故由引理5,$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(A,C)$.同理由 AX_0 是 $XB=C$ 的一解得

$$\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B\\ C\end{pmatrix}.$$

反之,若 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(A,C)$且 $\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B\\ C\end{pmatrix}$,则由引理

5，可设 X_0 和 Y_0 分别是 $AX=C$ 与 $YB=C$ 的解．令 $X=X_0C^{(1)}Y_0$，则 $AXB=C$. □

以下设 R 是一个主理想环．

定理 5 设 $A\in R_r^{m\times n}$，$B\in R_l^{s\times t}$，$C\in R^{m\times t}$，且 $M\in R^{m\times m}$ 与 $N\in R^{t\times t}$ 是幺模阵，使

$$MA=\begin{pmatrix}\hat{A}\\ O\end{pmatrix},\quad BN=(\hat{B},O),$$

其中 $\hat{A}\in R_r^{r\times n}$，$\hat{B}\in R_l^{s\times l}$. 令

$$\hat{C}=MCN=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}r\\ m-r\end{matrix},\quad \text{列分块 } l,\ t-l$$

L 是 $\hat{A}$ 的一个最大左因子，S 是 $\hat{B}$ 的一个最大右因子，使得 $\hat{A}=LU$，$\hat{B}=VS$，U 是一个左幺模阵，V 是一个右幺模阵. 矩阵方程(1)有解的充要条件是

(i) $C_{12}=O, C_{21}=O, C_{22}=O$,

(ii) $L^{-1}C_{11}S^{-1}\in R^{r\times l}$.

证明 设 $X\in R^{n\times s}$满足 $AXB=C$. 此示

$$\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & -C_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{A}\\ O\end{pmatrix}X(\hat{B},O).$$

从而(i)成立，注意到 $C_{11}=\hat{A}X\hat{B}$，故得

$$UXV=L^{-1}C_{11}S^{-1},$$

其中左边在 R 上. 从而(ii)成立.

反之，设 $U^{\#}\in R^{n\times r}$且 $V^{\#}\in R^{l\times s}$使 $UU^{\#}=I$，$V^{\#}V=I$. 令 $X=U^{\#}L^{-1}C_{11}S^{-1}V^{\#}$，由(i)及(ii)，对于 $X\in R^{n\times s}$，$AXB=C$ 成立. □

3 正则环上的矩阵方程(1)

设 R 是一个正则环. 考虑矩阵方程(1)，其中 $A\in R^{m\times n}$，$B\in R^{s\times t}$，$C\in R^{m\times t}$.

定理6 R 上的矩阵方程(1)相容的充要条件为

$$AA^{(1)}CB^{(1)}B=C, \tag{3}$$

或等价于

$$AA^{(1)}C=C \text{ 及 } CB^{(1)}B=C. \tag{4}$$

有解时,其通解为

$$X=A^{(1)}CB^{(1)}+U-A^{(1)}AUBB^{(1)} \tag{5}$$

其中 $U\in R^{n\times s}$ 是任意的.

证明 若(1)相容,则易知(3)成立. 反之,若(3)成立,则对任意的 $U\in R^{n\times s}$,有

$$A(A^{(1)}CB^{(1)}+U-A^{(1)}AUBB^{(1)})B=C.$$

故(1)可解,且(5)是其解. 另一方面,对(1)的任意解 $X_0\in R^{n\times s}$,有 $AX_0B=C$ 及

$$X_0=A^{(1)}CB^{(1)}+X_0-A^{(1)}AX_0BB^{(1)}.$$

故(5)为(1)的通解. 易验知,(3)$\Leftrightarrow$(4). □

4 矩阵方程(1)的(次)自共轭解

本段考虑矩阵方程(1),其中 $A\in K_r^{m\times n}$,$B\in K_{r_0}^{n\times p}$,$C\in K^{m\times p}$.

由第一章 § 4中的定理1,可设矩阵对(A^*,B)的 DSR 分解为

$$PA^*Q=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix},\quad PBQ_0=\begin{pmatrix} O & I_{r_2} & O \\ O & O & O \\ I_{r_1} & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r_2 \\ r-r_2 \\ r_1 \\ n-r-r_1 \end{matrix} \tag{6}$$

其中,$r_0=r_1+r_2$,$P\in GL_n(K)$,$Q\in GL_m(K)$,$Q_0\in GL_p(K)$.

令

$$P^{-*}XP^{-1}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_2 & r-r_2 & r_1 & n-r-r_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{12}^* & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{13}^* & X_{23}^* & X_{33} & X_{34} \\ X_{14}^* & X_{24}^* & X_{34}^* & X_{44} \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 \\ r-r_2 \\ r_1 \\ n-r-r_1 \end{array} \end{array}, \tag{7}$$

$$Q^*CQ_0=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r_0 & p-r_0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r \\ m-r \end{array} \end{array}, \tag{8}$$

$$C_1=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r_1 & r_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_2 \\ r-r_2 \end{array} \end{array}. \tag{9}$$

显然，$AXB=C, X=X^*$ 等价于下面的

$$Q^*AP^*P^{-*}XP^{-1}PBQ_0=Q^*CQ_0, X^*=X. \tag{10}$$

将(6)，(7)，(8)代入(10)，得

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{13} & X_{11} \\ X_{23} & X_{12}^* \end{pmatrix} & O \\ O & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

从而再由(9)立得 $X_{13}=C_{11}, X_{11}=C_{12}, X_{23}=C_{21}, X_{12}=C_{22}^*, C_2=O$，$C_3=O, C_4=O$. 于是，我们得到下面的

定理7 设(1)中的矩阵对(A^*, B)的 DSR 分解为(6)式，$P^{-*}XP^{-1}, Q^*CQ_0$及C_1分别为(7)，(8)及(9)，则矩阵方程(1)有自共轭解当且仅当 C_2, C_3及 C_4皆为零阵且 $C_{12}^*=C_{12}$. 有此解时，其一般解为

$$X=P^*\begin{pmatrix} C_{12} & C_{22}^* & C_{11} & X_{14} \\ C_{22} & X_{22} & C_{21} & X_{24} \\ C_{11}^* & C_{21}^* & X_{33} & X_{34} \\ X_{14}^* & X_{24}^* & X_{34}^* & X_{44} \end{pmatrix}P,$$

其中 $X_{14}\in K^{r_2\times(n-r-r_0)}, X_{22}\in SC_{r-r_2}(K), X_{24}\in K^{(r-r_2)\times(n-r-r_1)}$，

$X_{33}\in SC_{r_1}(K)$，$X_{34}\in K^{r_1\times(n-r-r_1)}$，$X_{44}\in SC_{n-r-r_1}(K)$是任意的. □

注1 关于矩阵方程(1)有次自共轭解的充要条件及其解集结构，请读者仿上完成.

5 矩阵方程(1)的亚正定解

考虑矩阵方程(1)，其中 $A\in Q_r^{m\times n}$，$B\in Q_{r_0}^{n\times p}$和 $C\in Q^{m\times p}$. 由第一章 § 4中的定理1可设(1)中的矩阵对(A,B^*)的 DSC 分解为

$$PAU=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix},\quad (\text{列: } r,\ n-r)$$

$$P_0B^*U=\begin{pmatrix} O & O & O & O \\ O & I_{r_2} & O & O \\ O & O & O & I_{r_1} \end{pmatrix}\begin{matrix} p-r_0 \\ r_2 \\ r_1 \end{matrix} \tag{11}$$

其中，$P\in GL_m(Q)$，$U\in GL_n(Q)$，$P_0\in GL_p(Q)$，$r_1+r_2=r_0$. 令

$$U^{-1}XU^{-*}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix}\begin{matrix} r-r_2 \\ r_2 \\ n-r-r_1 \\ r_1 \end{matrix},\quad (\text{列: } r-r_2,\ r_2,\ n-r-r_2,\ r_1) \tag{12}$$

$$PCP_0^*=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix},\quad (\text{列: } p-r_0,\ r_0) \tag{13}$$

$$C_2=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} r-r_2 \\ r_2 \end{matrix}.\quad (\text{列: } r_2,\ r_1) \tag{14}$$

显然，矩阵方程(1)等价于下面的矩阵方程

$$PAUU^{-1}XU^{-*}U^*BP_0^*=PCP_0^*. \tag{15}$$

将(11)～(13)代入(15)得

$$\begin{bmatrix} O & \begin{pmatrix} X_{12} & X_{14} \\ X_{22} & X_{24} \end{pmatrix} \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}.$$

故由(14)及上式立得 $C_1=O, C_3=O, C_4=O$ 且 $X_{12}=C_{11}, X_{14}=C_{12}, X_{22}=C_{21}, X_{24}=C_{22}$. 于是有下面的

引理6 考虑矩阵方程(1),设(A,B^*)的 DSC 分解为(11), $U^{-1}XU^{-*}, PCP_0^*$ 及 C_2分别为(12),(13)及(14),则(1)有解的充要条件为 $C_1=O, C_3=O, C_4=O$. 有解时,其一般解为

$$X=U\begin{bmatrix} X_{11} & C_{11} & X_{13} & C_{12} \\ X_{21} & C_{21} & X_{23} & C_{22} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{bmatrix}U^* \tag{16}$$

其中 $X_{i1}, X_{i3}(i=1,2,3,4), X_{j2}, X_{j4}(j=3,4)$ 皆为 Q 上的任意矩阵,其相应阶数见(12). □

定理8 在引理6的条件下,(1)有亚正定解的充要条件为 $C_1=O, C_3=O, C_4=O$ 且 $C_{21}\in P_{r_2}^*$. 有此解时,其通解为

$$X=U\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}U^* \tag{17}$$

其中

$$M_{11}=\begin{bmatrix} M_1 & C_{11} & X_{13} \\ X_{21} & C_{21} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & M_2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$M_1=D+\frac{1}{2}(C_{11}^*+X_{21}^*)(C_{21}+C_{21}^*)^{-1}(X_{21}+C_{11}^*),$$

$$M_2=G+\frac{1}{2}(X_{32}+X_{23}^*)(C_{21}+C_{21}^*)^{-1}(X_{23}+X_{32}^*),$$

$$M_{12}=\begin{pmatrix} C_{12} \\ C_{22} \\ X_{34} \end{pmatrix}, M_{22}=N+\frac{1}{2}(M_{21}+M_{12}^*)(M_{11}+M_{11}^*)^{-1}(M_{12}+M_{21}^*)$$

且 $D \in P_{r-r_2}^*$, $G \in P_{n-r-r_2}^*$, $N \in P_{r_1}^*$, $X_{21} \in Q^{r_2 \times (r-r_2)}$, $X_{31} \in Q^{(n-r-r_1)\times(r-r_2)}$, $X_{32} \in Q^{(n-r-r_1)\times r_2}$, $X_{34} \in Q^{(n-r-r_1)\times r_1}$, $X_{13} \in \{X_{13} \in Q^{(r-r_2)\times(n-r-r_1)} \mid M_{11} \in P_{n-r_1}^*\}$, $M_{21} \in Q^{r_1 \times (n-r_1)}$均为任意的.

证明 设(1)有亚正定解 X,则由引理6知,$C_1=O, C_3=O, C_4=O$,且 X 具有(16)的形式.由第一章§3中的命题5知

$$\left(\begin{array}{ccc|c} X_{11} & C_{11} & X_{13} & C_{12} \\ X_{21} & C_{21} & X_{23} & C_{22} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ \hline X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{array}\right) \xlongequal{\text{def.}} \begin{pmatrix} N_{11} & M_{12} \\ M_{21} & X_{44} \end{pmatrix} \in P_n^*.$$

由第一章§3中的定理10知,N_{11}与

$$X_{44}-\frac{1}{2}(M_{21}+M_{12}^*)(N_{11}+N_{11}^*)^{-1}(M_{12}+M_{21}^*) \xlongequal{\text{def.}} N \qquad (19)$$

均为亚正定矩阵.由第一章§3定理11知,

$$\begin{pmatrix} X_{11} & C_{11} \\ X_{21} & C_{21} \end{pmatrix} \in P_r^*, \begin{pmatrix} C_{21} & X_{23} \\ X_{32} & X_{33} \end{pmatrix} \in P_{n-r-r_1+r_2}^*.$$

从而,C_{21}与

$$X_{11}-\frac{1}{2}(C_{11}+X_{21}^*)(C_{21}+C_{21}^*)^{-1}(C_{11}^*+X_{21}) \xlongequal{\text{def.}} D, \qquad (20)$$

及

$$X_{33}-\frac{1}{2}(X_{32}+X_{23}^*)(C_{21}+C_{21}^*)^{-1}(X_{32}^*+X_{23}) \xlongequal{\text{def.}} G \qquad (21)$$

均为亚正定阵,故由(20)及(21)知,

$$X_{11}=D+\frac{1}{2}(C_{11}+X_{21}^*)(C_{21}+C_{21}^*)^{-1}(C_{11}^*+X_{21}),$$

$$X_{33}=G+\frac{1}{2}(X_{32}+X_{23}^*)(C_{21}+C_{21}^*)^{-1}(X_{32}^*+X_{23}).$$

于是 N_{11} 可表成(18)的形式，即 $N_{11}=M_{11}$. 从而由(19)式知

$$X_{44}=N+\frac{1}{2}(M_{21}+M_{12}^{*})(M_{11}+M_{11}^{*})^{-1}(M_{12}+M_{21}^{*}).$$

故 X 可表成(17)的形式.

反之，设 $C_1=O,C_3=O,C_4=O,C_{21}\in P_{r_2}^{*}$. 由第一章§3中的定理10及定理11知，存在 $X_{13}\in Q^{(r-r_2)\times(n-r-r_1)}$ 使

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\in P_n^{*}.$$

故具有(17)形式的 $X\in P_n^{*}$. 易验知上述的 X 为(1)的解.

注2 请读者给出矩阵方程(1)有斜亚正定解的充要条件及其解集结构.

6 矩阵方程(1)的(斜)亚半正定解

考虑矩阵方程(1)，其中 $A\in Q_r^{m\times n},B\in Q_{r_0}^{n\times p}$ 及 $C\in Q^{m\times p}$. 我们可设 (A^{*},B) 的 DSR 分解为

$$PA^{*}Q=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix},PBQ_0=\begin{pmatrix} O & O & O \\ O & I_{r_2} & O \\ O & O & O \\ O & O & I_{r_1} \end{pmatrix}\begin{matrix} r-r_2 \\ r_2 \\ n-r-r_1 \\ r_1 \end{matrix} \tag{22}$$

其中 $P\in GL_n(Q),Q\in GL_m(Q),Q_0\in GL_p(Q),r_1+r_2=r_0$.

令

$$P^{-*}XP^{-1}=\begin{matrix} & \begin{matrix} r-r_2 & r_2 & n-r-r_1 & r_1 \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix}\begin{matrix} r-r_2 \\ r_2 \\ n-r-r_1 \\ r_1 \end{matrix} \end{matrix}, \tag{23}$$

$$Q^* C Q_0 = \overset{\quad p-r_0 \quad r_0}{\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}} \begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}, \tag{24}$$

$$C_2 = \overset{\quad r_2 \quad r_1}{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}} \begin{matrix} r-r_2 \\ r_2 \end{matrix}. \tag{25}$$

如同引理6的证明一样，我们易证明下面的

引理7 设(1)的矩阵对(A^*,B)的 DSR 分解为(22)式，$P^{-*}XP^{-1}$,Q^*CQ_0及C_2分别为(23),(24)及(25)式，则矩阵方程(1)可解当且仅当C_1,C_3,C_4皆为零矩阵.有解时，其通解为

$$X = P^* \begin{pmatrix} X_{11} & C_{11} & X_{13} & C_{12} \\ X_{21} & C_{21} & X_{23} & C_{22} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix} P, \tag{26}$$

其中$X_{i1}(i=1,2,3,4)$,$X_{i2}(i=3,4)$,$X_{i3}(i=1,2,3,4)$,$X_{i4}(i=3,4)$是Q上的阶数由(23)式决定的任意阵.

定理9 在引理7的条件下，矩阵方程(1)有亚半正定解当且仅当C_1,C_3和C_4皆为零阵且$C_{21}\in SP^*_{r_2}$.有此种解时，其通解为

$$X = P^* \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} P, \tag{27}$$

其中

$$M_{11} = \begin{pmatrix} D_2 + U_2^* C_{21} U_2 & C_{11} & X_{13} \\ -C_{11}^* + (C_{21}^* + C_{21}) U_2 & C_{21} & X_{23} \\ X_{31} & -X_{23}^* + U_3^* (C_{21}^* + C_{21}) & D_3 + U_3^* C_{21} U_3 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$M_{12}=\begin{pmatrix} C_{12} \\ C_{22} \\ X_{34} \end{pmatrix}, M_{21}=-(C_{12}^*, C_{22}^*, X_{34}^*)+U_1^*(M_{11}+M_{11}^*),$$

$M_{22}=D_1+U_1^* M_{11}U_1, D_3\in SP_{n-r_1-r}^*, D_2\in SP_{r-r_2}^*, D_1\in SP_{r_1}^*$,
$U_1\in Q^{(n-r_1)\times r_1}, U_2\in Q^{r_2\times(r-r_2)}, U_3\in Q^{r_2\times(n-r-r_1)}, X_{23}\in Q^{r_2\times(n-r-r_1)}$,
$X_{13}\in\{X_{13}\in Q^{(r-r_2)\times(n-r-r_1)}\mid M_{11}\in SP_{n-r_1}^*\}$是任意的.

证明 设矩阵方程(1)有亚半正定解 X，则由引理7，C_1，C_3及C_4皆为零矩阵，且 X 具有(26)的形式. 于是，

$$\left(\begin{array}{ccc|c} X_{11} & C_{11} & X_{13} & C_{12} \\ X_{21} & C_{21} & X_{23} & C_{22} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ \hline X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{array}\right) \xlongequal{\text{def.}} \begin{pmatrix} N_{11} & M_{12} \\ N_{21} & X_{44} \end{pmatrix}\in SP_n^*.$$

由第一章§3中的定理8，N_{11}与

$$X_{44}-U_1^* N_{11}U_1 \xlongequal{\text{def.}} D_1 \tag{29}$$

皆为亚半正定阵，这里 U_1是矩阵方程

$$(N_{11}+N_{11}^*)X=N_{21}^*+M_{12} \tag{30}$$

的任一解. 再由第一章§3的定理9知，

$$\begin{pmatrix} X_{11} & C_{11} \\ X_{21} & C_{21} \end{pmatrix}\in SP_r^*, \begin{pmatrix} C_{21} & X_{23} \\ X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}\in SP_{n-r-r_1+r_2}^*.$$

于是，C_{11}与

$$X_{11}-U_2^* C_{21}U_2 \xlongequal{\text{def.}} D_2 \tag{31}$$

及
$$X_{33}-U_3^* C_{21}U_3 \xlongequal{\text{def.}} D_3 \tag{32}$$

均为亚半正定的，这里 U_2是矩阵方程

$$(C_{21}+C_{21}^*)X=C_{11}^*+X_{21} \tag{33}$$

的任一解，U_2是矩阵方程

$$(C_{21}+C_{21}^*)X=X_{23}+X_{32}^* \tag{34}$$

的解. 故由(31)～(34)，

$$X_{11}=D_2+U_2^*C_{21}U_2,$$
$$X_{33}=D_3+U_3^*C_{21}U_3,$$
$$X_{21}=-C_{11}^*+(C_{21}+C_{21}^*)U_2$$

及

$$X_{32}=-X_{23}^*+U_3^*(C_{21}+C_{21}^*).$$

于是，$N_{11}=M_{11}$. 由(29)和(30)，$X_{44}=D_1+U_1^*M_{11}U_1$及$N_{21}=-M_{12}^*+U_1^*(M_{11}+M_{11}^*)$. 故 X 可表成(27)的形式.

反之，设 C_1,C_3及C_4均为零矩阵，$C_{21}\in SP_{r_2}^*$，则由第一章§3定理8和定理9，存在 $X_{13}\in Q^{(r-r_2)\times(n-r-r_1)}$使

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}\in SP_n^*.$$

故具有(27)形式的矩阵 X 必是亚半正定的. 易验知，(27)是(1)之解. □

下面我们考虑矩阵方程(1)的斜亚半正定解.

设(1)中的矩阵对$(A,B^{(*)})$的 DSC 分解为

$$PAU=\begin{array}{c} \begin{matrix} r & n-r \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{array}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix},$$

$$P_0B^{(*)}U=\begin{array}{c} \begin{matrix} r-r_2 & r_2 & n-r_1-r_2 & r_1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} O & O & O & O \\ O & I_{r_2} & O & O \\ O & O & O & I_{r_1} \end{pmatrix} \end{array}\begin{matrix} p-r_0 \\ r_2 \\ r_1 \end{matrix}, \qquad (35)$$

其中 $r_1+r_2=r_0$.

令

$$
U^{-1}XU^{-(*)}=\begin{matrix} & r_1 & n-r-r_1 & r_2 & r-r_2 & \\ \left(\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right. & \begin{matrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \\ X_{41} \end{matrix} & \begin{matrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \\ X_{42} \end{matrix} & \begin{matrix} X_{13} \\ X_{23} \\ X_{33} \\ X_{43} \end{matrix} & \begin{matrix} X_{14} \\ X_{24} \\ X_{34} \\ X_{44} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right) \begin{matrix} r-r_2 \\ r_2 \\ n-r_1-r \\ r_2 \end{matrix} \end{matrix}, \tag{36}
$$

$$
PCP_0^{(*)}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}, \quad \begin{matrix} r_0 & p-r_0 \end{matrix} \tag{37}
$$

$$
C_1=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} r-r_2 \\ r_2 \end{matrix}. \quad \begin{matrix} r_1 & r_2 \end{matrix} \tag{38}
$$

引理8 考虑矩阵方程(1),设$(A,B^{(*)})$的 DSC 为(35)式,$U^{-1}XU^{-(*)}$,$PCP_0^{(*)}$及C_1分别为(36),(37)及(38),则(1)有解的充要条件为$C_i=O(i=2,3,4)$.有解时,其一般解为

$$
X=U\begin{pmatrix} C_{11} & X_{12} & C_{12} & X_{14} \\ C_{21} & X_{22} & C_{22} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix}U^{(*)} \tag{39}
$$

其中,$X_{3j},X_{4j}(j=1,2,3,4)$及$X_{i2},X_{i4}(i=1,2)$分别为阶数由(36)决定的Q上的任意的矩阵.

定理10 在引理8的条件下,矩阵方程(1)有斜亚半正定解的充要条件是$C_i=O(i=2,3,4)$且$C_{22}\in SP_{r_2}^{(*)}$.有此解时,其通解为

$$
X=U\begin{pmatrix} W & M \\ D+U_3^{(*)}MU_3 & -W^{(*)}+U_3^{(*)}(M+M^{(*)}) \end{pmatrix}U^{(*)}, \tag{40}
$$

其中，$D\in SP_{r_1}^{(*)}$，$W=\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ X_{31} \end{pmatrix}$，

$$M=\begin{pmatrix} X_{12} & C_{12} & D+U_2^{(*)}C_{22}U_2 \\ X_{22} & C_{22} & -C_{12}^{(*)}+(C_{22}+C_{22}^{(*)})U_2 \\ D_1+U_1^{(*)}C_{22}U_1 & -X_{22}^{(*)}+U_1^{(*)}(C_{22}+C_{22}^{(*)}) & X_{34} \end{pmatrix},$$

$D_1\in SP_{n-r-r_1}^{(*)}$，$D_2\in SP_{r-r_2}^{(*)}$，

$X_{12}\in\{X_{12}\in Q^{(r-r_2)\times(n-r-r_1)}\mid M\in SP_{n-r_1}^{(*)}\}$，

$X_{22}\in Q^{r_2\times(n-r-r_1)}$，$X_{31}\in Q^{(n-r_1-r)\times r_1}$，$X_{34}\in Q^{(n-r_1-r)\times(r-r_2)}$，

$U_1\in Q^{r_2\times(n-r-r_1)}$，$U_2\in Q^{r_2\times(r-r_2)}$，$U_3\in Q^{(n-r_1)\times r_1}$为任意的.

注3 请读者完成引理8及定理10的证明.

§4 四元数矩阵方程 $AXB=C$ 的最小二乘解

我们在第一章§7中介绍了实四元数矩阵的范数.本节研究实四元数矩阵方程

$$AXB=C \tag{1}$$

的最小二乘解、极小范数的最小二乘解及(1)在约束条件

$$DX=E \tag{2}$$

下的最小二乘解与极小范数的最小二乘解.特别地，我们还得到了实四元数矩阵方程 $AX=B$ 及其在约束条件 $CX=D$ 下的最小二乘解与极小范数解.

1 矩阵方程(1)的最小二乘解与极小范数的最小二乘解

考虑矩阵方程(1)，其中 $A\in Q^{m\times n}$，$B\in Q^{r\times t}$，$C\in Q^{m\times t}$.

定义1 对于(1)，若有 $X_0\in Q^{n\times r}$使得

$$\|AX_0B-C\|^2=\min_{X\in Q^{n\times r}}\|AXB-C\|^2, \tag{3}$$

称 X_0为(1)的一个最小二乘解.

定义2 称矩阵方程

$$A^* AXBB^* = A^* CB^* \tag{4}$$

为矩阵方程(1)的正规方程.

引理1 矩阵方程(1)有解的充要条件为 $AA^+CB^+B=C$. 有解时,其一般解为

$$X = A^+CB^+ + Y - A^+AYBB^+,$$

其中 $Y\in Q^{n\times r}$为任意的.

引理2 设 $A\in Q^{m\times n}$,则

(1) $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$;

(2) $A^* = A^*A(A^*A)^+A^*$.

引理3 设 $L\in Q^{m\times n}, Q_L = I - L^+L, G\in Q^{m\times k}, N\in Q^{n\times n}$,则

(1) $Q_L^* = Q_L = Q_L^2$;

(2) $Q_L(L^+G) = O$;

(3) $Q_L(NQ_L)^+ = (NQ_L)^+$.

由引理1及引理2易证得下面的

引理4 矩阵方程(1)的正规方程(4)一定有解.

定理1 X_0是矩阵方程(1)的一个最小二乘解的充要条件是 X_0是(4)的解. 因而(1)一定有最小二乘解.

证明 由第一章§1的命题13及§7的命题2可得,对任意的 $\hat{X}, X\in Q^{n\times r}$,有

$$\|AXB-C\|^2 = \|A\hat{X}B-C\|^2 + \|A(X-\hat{X})B\|^2 + 2\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(X-\hat{X})^* A^*(A\hat{X}B-C)B^*]. \tag{5}$$

设 X_0是(4)的解,即

$$A^*AX_0BB^* = A^*CB^*. \tag{6}$$

在(5)中令 $\hat{X}=X_0$,则由(6)立得

$$\|AXB-C\|^2 = \|AX_0B-C\|^2 + \|A(X-X_0)B\|^2 \geqslant \|AX_0B-C\|^2.$$

于是，由 $X\in Q^{n\times r}$ 的任意性知

$$\min_X\|AXB-C\|^2\geqslant\|AX_0B-C\|^2,$$

故

$$\|AX_0B-C\|^2=\min_X\|AXB-C\|^2, \tag{7}$$

即 X_0是(1)的一个最小二乘解.

反之，设 X_0是(1)的一个最小二乘解，则(7)成立. 由引理4可设 Y_0为(4)的一个解，即 $A^*AY_0BB^*=A^*CB^*$，则类似于(7)的证明，有

$$\|AY_0B-C\|^2=\min_X\|AXB-C\|^2. \tag{8}$$

由(7)与(8)得

$$\|AX_0B-C\|^2=\|AY_0B-C\|^2. \tag{9}$$

在(5)中，令 $X=X_0,\hat{X}=Y_0$并利用(6)可得

$$\|AX_0B-C\|^2=\|AY_0B-C\|^2+\|A(X_0-Y_0)B\|^2.$$

于是由(9)则得$\|A(X_0-Y_0)B\|^2=O$. 故 $AX_0B=AY_0B$. 从而有

$$A^*AX_0BB^*=A^*AY_0BB^*=A^*CB^*.$$

即 X_0是(1)的正规方程(4)的解.

由引理4知，(1)一定有最小二乘解. □

定理2 矩阵方程(1)的最小二乘解集为

$$M=\{A^+CB^++Y-A^+AYBB^+\mid Y\in Q^{n\times r}\}. \tag{10}$$

证明 由定理1，只须证(4)的解集为(10)即可. 因(4)有解，故由引理1知，(4)的解集为

$$\{(A^*A)^+A^*CB^*(BB^*)^++Y-(A^*A)^+(A^*A)Y(BB^*)(BB^*)^+ \mid Y\in Q^{n\times r}.\} \tag{11}$$

由引理2知，(11)即(10). □

定义3 设 $X_0\in M$，且$\|X_0\|=\min_{X\in M}\|X\|$，则称 X_0是矩阵方程(1)的极小范数的最小二乘解.

定理3 A^+CB^+为矩阵方程(1)的一个极小范数的最小二乘

解.

证明 由定理2知，$A^+CB^+\in M$，且可设

$$X_1=A^+CB^++Y_1-A^+AY_1BB^+$$

($Y_1\in Q^{n\times r}$)为(1)的任一最小二乘解，则

$$\|X_1\|^2=\|Y_1-A^+AY_1BB^+\|^2+\|A^+CB^+\|^2 \\ +2\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(Y_1-A^+AY_1BB^+)^*A^+CB^+]. \qquad (12)$$

由第一章§7的命题2可验知，

$$\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(Y_1-A^+AY_1BB^+)^*A^+CB^+]=0.$$

故由(12)式得

$$\|X_1\|^2=\|A^+CB^+\|^2+\|Y_1-A^+AY_1BB^+\|^2\geqslant\|A^+CB^+\|^2.$$

由 X_1的任意性，定理获证. □

定义4 矩阵方程

$$AX=B \qquad (13)$$

(其中 $A\in Q^{m\times n}, B\in Q^{m\times r}$)若满足下面的条件(14)，则称 $X_0\in Q^{n\times r}$ 为其一个最小二乘解，

$$\|AX_0-B\|^2=\min_{X\in Q^{n\times r}}\|AX-B\|^2. \qquad (14)$$

定义5 设 M 是(13)的最小二乘解集，如果 $X_0\in M$ 满足

$$\|X_0\|=\min_{X\in M}\|X\|,$$

则称 X_0为(13)的极小范数的最小二乘解.

推论1 矩阵方程(13)的最小二乘解集为

$$\{A^+B+(I-A^+A)Y\,|\,Y\in Q^{n\times r}\};$$

且 A^+B 为(13)的一个极小范数的最小二乘解.

考虑 Q 上的线性方程

$$AX=b, \qquad (15)$$

$A\in Q^{m\times n}, b\in Q^{m\times 1}$. 可类似定义(15)的最小二乘解及极小范数的最小二乘解.

推论2 (15)的最小二乘解集为

$$\{A^+b+(I-A^+A)Y \mid Y\in Q^{n\times 1}\};$$

A^+b 为(15)的一个极小范数的最小二乘解.

2 矩阵方程(1)在条件(2)下的最小二乘解

令 $A\in Q^{m\times n}, B\in Q^{r\times t}, C\in Q^{m\times t}, D\in Q^{s\times n}$ 及 $E\in Q^{s\times r}$.

定义6 对于 Q 上的矩阵方程(1)及约束条件(2),若有 $X_0\in Q^{n\times r}$ 满足

(i) $DX_0=E$;

(ii) $\|AX_0B-C\|^2=\min\limits_{DX=E}\|AXB-C\|^2$,

则称 X_0 为带约束条件(2)的矩阵方程(1)的最小二乘解.

定理4 设 $DD^+E=E$,则在约束条件(2)下的矩阵方程(1)的最小二乘解集为

$$S=\{D^+E+Q_D(AQ_D)^+(C-AD^+EB)B^++Q_DV \\ -Q_D(AQ_D)^+(AQ_D)VBB^+ \mid V\in Q^{n\times r}\} \tag{16}$$

其中 $Q_D=I-D^+D$.

证明 由引理1,方程(2)有解,且其通解为

$$X=D^+E+Q_DU \tag{17}$$

其中 $U\in Q^{n\times r}$ 是任意的. 于是

$$\min_{DX=E}\|AXB-C\|^2=\min_U\|AQ_DUB-(C-AD^+EB)\|^2. \tag{18}$$

由定理2,

$$U=(AQ_D)^+(C-AD^+EB)B^++V-(AQ_D)^+(AQ_D)VBB^+, \tag{19}$$

其中 $V\in Q^{n\times r}$ 是任意的,将(19)代入(17)即有(16). □

定义7 设 $X_0=\in S$ 且 $\|X_0\|^2=\min\limits_{X\in S}\|X\|^2$,则称 X_0 为带条件(2)的矩阵方程(1)的极小范数的最小二乘解.

定理5 设 $DD^+E=E$,则

$$X_0=D^+E+Q_D(AQ_D)^+(C-AD^+EB)B^+ \tag{20}$$

为带约束条件(2)的矩阵方程(1)的极小范数的最小二乘解.

证明 设任意的 $X_1\in S$,则

$$\begin{aligned}\|X_1\|^2=&\|Q_DV_1-Q_D(AQ_D)^+(AQ_D)V_1BB^+\|^2\\&+\|D^+E+Q_D(AQ_D)^+(C-AD^+EB)B^+\|^2\\&+2\mathrm{Re}[\mathrm{tr}(Q_DV_1-Q_D(AQ_D)^+(AQ_D)V_1BB^+)^*(D^+E\\&+Q_D(AQ_D)^+(C-AD^+EB)B^+],\end{aligned}\tag{21}$$

其中 $V_1\in Q^{n\times r}$,由引理3及第一章§7命题2可验知(21)式右端的第3项为 O. 故

$$\|X_1\|^2\geqslant\|D^+E+Q_D(AQ_D)^+(C-AD^+EB)B^+\|^2=\|X_0\|^2.$$

于是,由 X_1的任意性,定理获证. □

下设 $A\in Q^{m\times n},B\in Q^{m\times r},D\in Q^{t\times n}$及 $E\in Q^{t\times r}$.

定义8 对矩阵方程(13)和约束条件(2),$X_0\in Q^{n\times r}$称为(13)带条件(2)的极小范数的最小二乘解,如果 X_0满足

(i) $DX_0=E$;

(ii) $\|AX_0-B\|^2=\min\limits_{DX=E}\|AX-B\|^2$.

推论3 设 $DD^+E=E$,则(13)带有(2)的极小范数的最小二乘解集为

$$\{D^+E+L_D(AL_D)^+(B-AD^+E)+L_DV$$
$$-L_D(AL_D)^+(AL_D)V\,|\,V\in Q^{n\times r}\}$$

其中,$L_D=I-D^+D$.

注 请读者给出 Q 上的线性方程组 $Ax=b$ 在约束条件 $Cx=d$ 下的极小范数的最小二乘解的定义及其解集结构.

§5 环上的矩阵方程 $AX^*-XB=C$ 与 $AX-X^*B=C$

本节令 Ω_1是一个特征不为2的具有对合反自同构的有限维中

心代数.我们将给出矩阵方程

$$AX^* - XB = C \tag{1}$$

与

$$AX - X^* B = C \tag{2}$$

相容的充要条件.

定理1 设 $A \in \Omega_1^{m\times n}$, $B \in \Omega_1^{n\times m}$ 及 $C \in \Omega_1^{m\times m}$, 则矩阵方程(1)相容的充要条件是存在可逆阵 $Q \in \Omega_1^{(m+n)\times(m+n)}$ 使

$$\begin{pmatrix} O & B \\ -A & -C \end{pmatrix} = Q^* \begin{pmatrix} O & B \\ -A & O \end{pmatrix} Q. \tag{3}$$

证明 设

$$M_0 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, M_c = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_m & O \end{pmatrix}.$$

显然有 $J^{-1} = J^*$.

设矩阵方程(1)有解 X 且

$$Q = \begin{pmatrix} I_n & X^* \\ O & I_m \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} I_m & X \\ O & I_n \end{pmatrix},$$

则

$$M_0 Q = S M_c \tag{4}$$

且

$$Q^* J S = J. \tag{5}$$

故

$$Q^* J M_0 Q = J M_c, \tag{6}$$

亦即(3)式成立.

反之,设(3)成立,令 $S = J^{-1} Q^{-*} J$, 则(4)和(5)成立.记

$$U = \begin{array}{@{}c@{}c@{}} \begin{matrix} n & m \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} U_1 & U_{12} \\ U_{21} & U_2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \end{array}, V = \begin{array}{@{}c@{}c@{}} \begin{matrix} m & n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} V_1 & V_{12} \\ V_{21} & V_2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \end{array} \tag{7}$$

是 Ω_1 上的矩阵，且令

$$T_c=\{(U,V)\mid M_0U=VM_c,J^*U^*JM_0=M_cJV^*J^*\},\tag{8}$$

则对 $(U,V)\in T_c$，我们有下面的

$$\left.\begin{aligned}AU_1-V_1A&=O\\BU_{21}-V_{21}A&=O\\AU_{12}-V_1C-V_{12}B&=O\\BU_2-V_{21}C-V_2B&=O\\U_2^*A-AV_2^*+CV_{21}^*&=O\\-U_{12}^*B+AV_{12}^*-CV_1^*&=O\\-U_{21}^*A+BV_{21}^*&=O\\U_1^*B-BV_1^*&=O\end{aligned}\right\}.\tag{8}$$

易验证 T_c 是 Ω_1 的中心 K 上的一个线性空间，其数乘运算及加法定义如下.

$$(U,V)b=(Ub,Vb),b\in K,$$

$$(U_1,V_1)+(U_2,V_2)=(U_1+U_2,V_1+V_2).$$

对 $C=O$，令 T_0 由(8)式定义，由(4)与(5)不难验证 $(U,V)\in T_c$ 当且仅当 $(UQ^{-1},VS^{-1})\in T_0$. 故

$$\dim T_c=\dim T_0.\tag{9}$$

定义 $\Omega_1^{(m+n)\times(m+n)}\times\Omega_1^{(m+n)\times(m+n)}$ 到 $\Omega_1^{(m+n)\times m}$ 的映射 f 如下：

$$f(U,V)=\begin{pmatrix}V_1\\V_{21}\end{pmatrix}.$$

显然 $C=O$ 时，有 $(U,V)=(I,I)\in T_0$. 从而

$$\begin{pmatrix}I_m\\O\end{pmatrix}\in f(T_0).\tag{10}$$

设 $f_c=f|_{T_c}$ 及 $f_0=f|_{T_0}$，由(8)知

$$\operatorname{Ker}f_c=\operatorname{Ker}f_0.\tag{11}$$

设 U 和 V 为(7)及

$$K=\begin{pmatrix} U_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, L=\begin{pmatrix} V_1 & O \\ V_{21} & O \end{pmatrix}.$$

由(8)知，如果$(U,V)\in T_c$，则$(K,L)\in T_0$. 故

$$\text{Im} f_c \subseteq \text{Im} f_0. \tag{12}$$

由第一章§1的定理4有

$$\dim\text{Ker} f_c + \dim\text{Im} f_c = \dim T_c,$$

$$\dim\text{Ker} f_0 + \dim\text{Im} f_0 = \dim T_0.$$

所以，由(9)和(11)得 $\dim\text{Im} f_c = \dim\text{Im} f_0$. 从而由(12)得 $\text{Im} f_c = \text{Im} f_0$，即 $f(T_c)=f(T_0)$. 由(10)知，

$$\begin{pmatrix} I_m \\ O \end{pmatrix} \in f(T_c).$$

故存在$(U,V)\in T_c$ 使得 $V_1=I_m$. 由(8)，我们有

$$AU_{12}-V_{12}B=C \tag{13}$$

$$AV_{12}^*-U_{12}^*B=C. \tag{14}$$

令

$$X=\frac{1}{2}(V_{12}+U_{12}^*), \tag{15}$$

则 X 是矩阵方程(1)的解. □

定理2　设 $A\in\Omega_1^{m\times n}$，$B\in\Omega_1^{n\times m}$及 $C\in\Omega_1^{m\times m}$，则矩阵方程(2)可解的充要条件是存在可逆阵 $S\in\Omega_1^{(n+m)\times(n+m)}$使得

$$\begin{pmatrix} O & -A \\ B & O \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} C & -A \\ B & O \end{pmatrix} S^*.$$

注1　请读者仿定理1完成定理2的证明.

注2　类似地可考虑 Ω_1上的矩阵方程 $AX^*+XB=C$ 与 $AX+X^*B=C$ 可解的充要条件.

§6　Roth 定理的几种推广

1952年，W. E. Roth[73]给出了两个著名的定理，它们是

定理1(等价定理) 设 F 是一个域,$A\in F^{m\times n}$,$B\in F^{s\times k}$及 $C\in F^{m\times k}$,则矩阵方程 $AX-YB=C$ 有解的充要条件是

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

等价.

定理2(相似定理) 设 $A\in F^{m\times m}$,$B\in F^{s\times s}$,$C\in F^{m\times s}$,则矩阵方程 $AX-XB=C$ 有解的充要条件是

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

相似.

四十多年来,人们对上述两个定理的证明做过许多工作(见〔73~80〕,〔53〕,〔55〕,〔57〕),给出了许多推广,本节将给出 Roth 定理在单 Artinian 环上的推广,介绍交换环上的 Roth 定理,给出环上矩阵方程 $AX-XB=C$ 有自共轭解的充要条件及 $AX+XB=-C$ 有反自共轭解的充要条件等.

1 Roth 定理在单 Artinian 环上的推广

设 R 是一个单 Artinian 环. 由第一章 § 2定理5,R 与某一个体 Ω 上的全矩阵环同构. 下面,我们先给出 Roth 定理在任意体 Ω 上的推广.

定理3 设 $A\in \Omega^{m\times n}$,$B\in \Omega^{s\times k}$,$C\in \Omega^{m\times k}$,则

(i) 矩阵方程

$$AX-YB=C \tag{1}$$

有解的充要条件是

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

等价;

(ii) 当 $n=m$,$k=s$ 时,矩阵方程

$$AX - XB = C \tag{2}$$

有解的充要条件是

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

相似.

证明 设

$$M_0 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}, M_c = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

(i) 设 X, Y 满足(1)式,令

$$Q = \begin{pmatrix} I_n & X \\ O & I_k \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} I_m & Y \\ O & I_s \end{pmatrix},$$

则

$$M_0 Q = S M_c. \tag{3}$$

从而 M_0 与 M_c 等价.

反之,若 M_0 与 M_c 等价,则有可逆阵 Q, S 使(3)成立,令

$$U = \begin{pmatrix} \overset{n}{U_1} & \overset{k}{U_{12}} \\ U_{21} & U_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ k \end{matrix}, V = \begin{pmatrix} \overset{m}{V_1} & \overset{s}{V_{12}} \\ V_{21} & V_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ s \end{matrix} \tag{4}$$

是 R 上的矩阵,并且令

$$T_c = \{(U, V) \mid M_0 U = V M_c\}. \tag{5}$$

对任意的 $(U, V) \in T_c$,有

$$\left.\begin{aligned} AU_1 - V_1 A &= O \\ BU_{21} - V_{21} A &= O \\ AU_{12} - V_1 C - V_{12} B &= O \\ BU_2 - V_{21} C - V_2 B &= O \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

定义运算如下:

$$(U, V)b = (Ub, Vb), b \in C_0 (C_0 为 \Omega 之中心)$$

$$(U_1, V_1) + (U_2, V_2) = (U_1 + U_2, V_1 + V_2).$$

易验知，T_c 关于上述运算构成 Ω 的中心 C_0上的一个有限维线性空间. $C=O$，T_0是由(5)式定义的. 由(3)及(5)式可验证$(U,V)\in T_c$ 当且仅当$(UQ^{-1},VS^{-1})\in T_0$. 故

$$\dim T_c=\dim T_0. \tag{7}$$

定义线性映射 $f:\Omega^{(k+n)\times(k+n)}\times\Omega^{(m+s)\times(m+s)}\to\Omega^{(m+s)\times m}$，

$$f(U,V)=\begin{pmatrix}V_1\\V_{21}\end{pmatrix}.$$

显有 $C=O$ 时，$(U,V)=(I_{n+k},I_{m+s})\in T_0$. 故

$$\begin{pmatrix}I_m\\O\end{pmatrix}\in f(T_0). \tag{8}$$

令 $f_c=f|T_c$，$f_0=f|T_0$，则由(6)式知，

$$\mathrm{Ker}f_c=\mathrm{Ker}f_0, \tag{9}$$

由(4)可令

$$N=\begin{pmatrix}U_1&O\\U_{21}&O\end{pmatrix},L=\begin{pmatrix}V_1&O\\V_{21}&O\end{pmatrix},$$

则由(6)知，若$(U,V)\in T_c$，则$(N,L)\in T_0$. 故

$$\mathrm{Im}f_c\subseteq\mathrm{Im}f_0. \tag{10}$$

由第一章§1定理4知

$$\dim\mathrm{Ker}f_c+\dim\mathrm{Im}f_c=\dim T_c,$$

$$\dim\mathrm{Ker}f_0+\dim\mathrm{Im}f_0=\dim T_0.$$

故由(7)式及(9)式得

$$\dim\mathrm{Im}f_c=\dim\mathrm{Im}f_0.$$

又由(10)式知，$\mathrm{Im}f_c=\mathrm{Im}f_0$，即 $f(T_c)=f(T_0)$.
由(8)式，

$$\begin{pmatrix}I_m\\O\end{pmatrix}\in f(T_c).$$

所以，存在$(U,V)\in T_c$，使 $V_1=I_m$. 由(6)式可得

$$AU_{12}-V_{12}B=C. \tag{11}$$

此示，矩阵方程(1)有解.

(ii) 在(i)的证明中，令 $n=m,s=k,S=Q,V=U$，则(11)式变为 $AU_{12}-U_{12}B=C$. 其它保持不变，即得(ii)的证明. □

推论1 设 $A\in R^{m\times n},B\in R^{s\times k},C\in R^{m\times k}$，则

(i) 矩阵方程(1)相容当仅当

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

等价；

(ii) 当 $n=m,k=s$ 时，矩阵方程(2)相容当且仅当

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \text{与} \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

相似.

2 环上矩阵方程 $AX\mp XB=\pm C$

设 Ω_1是一个具有对合反自同构的有限维中心代数且 $\mathrm{Ch}\Omega_1\neq 2$. 本段研究矩阵方程

$$AX-XB=C \tag{12}$$

和

$$AX+XB=-C \tag{13}$$

其中 $A,B,C\in\Omega_1^{m\times m}$. 给出(12)有自共轭解和(13)有反自共轭解的充要条件.

定理4 矩阵方程(12)有自共轭解的充要条件是存在可逆阵 $Q\in\Omega_1^{2m\times 2m}$使得

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}=Q^{-1}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}Q$$

及

$$Q^*\begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}.$$

证明　在第二章§5定理1的证明中，令 $n=m, S=Q, V=U$，则§5中的(15)式变为

$$X=\frac{1}{2}(U_{12}+U_{12}^*)\in SC_m(\Omega_1).$$

此定理证明的其它部分不变，即得定理4的证明. □

定理5　矩阵方程(13)有反自共轭解当且仅当存在可逆阵 $Q\in\Omega_1^{2m\times 2m}$ 使得

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}Q$$

及

$$Q^*\begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix}.$$

证明　在第二章§5定理1的证明中，令 $n=m, S=Q^{-1}$，
$T_c=\{(U,U)\,|\,M_oU+UM_c=O, J^*U^*JM_o+M_cJU^*J^*=O\}$.
则§5中的(8)，(13)，(14)及(15)分别变为

$$\left.\begin{aligned} AU_1+U_1A&=O\\ BU_{12}+U_{21}A&=O\\ AU_{12}+U_1C+U_{12}B&=O\\ BU_2+U_{21}C+U_2B&=O\\ U_2^*A+AU_2^*-CU_{21}^*&=O\\ -U_{12}^*B-AU_{12}^*+CU_1^*&=O\\ -U_{21}^*A-BU_{21}^*&=O\\ U_1^*B+BU_1^*&=O,\\ AU_{12}+U_{12}B&=-C, \end{aligned}\right\},$$

$$A(-U_{12}^*)-U_{12}^*B=-C,$$

$$X=\frac{1}{2}(U_{12}-U_{12}^{*})\in SS_m(\Omega_1).$$

§5中的定理1的证明其它部分不变，即得此定理的证明. □

3 Roth 等价定理在任意体上的一种证明

本段我们利用矩阵技巧，在任意体 Ω 上给出 Roth 等价定理的一种证明.

设 $A\in\Omega_r^{m\times n}$, $B\in\Omega_l^{s\times k}$, $C\in\Omega^{m\times k}$.

若矩阵方程 $AX-YB=C$ 有解 $X\in\Omega^{n\times k}$, $Y\in\Omega^{m\times s}$，则

$$\begin{pmatrix}I_m & -Y\\ O & I_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & X\\ O & I_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & AX-YB\\ O & B\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}.$$

于是，

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}. \tag{14}$$

反之，设(14)成立. 对于 A,B，存在 $P\in GL_m(\Omega)$, $Q\in GL_n(\Omega)$, $R\in GL_s(\Omega)$, $S\in GL_k(\Omega)$ 使

$$PAQ=\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix},\ RBS=\begin{pmatrix}I_l & O\\ O & O\end{pmatrix}.$$

从而，

$$\begin{pmatrix}P & O\\ O & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & O\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & O\\ O & S\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}I_l & O & O & O\\ O & O & O & O\\ O & O & I_l & O\\ O & O & O & O\end{bmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}P & O\\ O & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q & O\\ O & S\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}PAQ & PCS\\ O & RBS\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} I_r & O & C_{11} & C_{12} \\ O & O & C_{21} & C_{22} \\ O & O & I_t & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix},$$

其中

$$PCS=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

而且

$$\begin{pmatrix} I_r & O & -C_{11} & O \\ O & I_{m-r} & -C_{21} & O \\ O & O & I_t & O \\ O & O & O & I_{s-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O & C_{11} & C_{12} \\ O & O & C_{21} & C_{22} \\ O & O & I_t & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & O & O & -C_{12} \\ O & I_{m-r} & O & O \\ O & O & I_t & O \\ O & O & O & I_{s-t} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} I_r & O & O & O \\ O & O & O & C_{22} \\ O & O & I_t & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}.$$

由(14)知，$C_{22}=O$. 令

$$J=\begin{pmatrix} C_{11} & O \\ C_{21} & O \end{pmatrix}, K=\begin{pmatrix} O & C_{12} \\ O & O \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{pmatrix} I_m & -J \\ O & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O \\ O & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & O \\ O & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & -K \\ O & I_t \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} P & O \\ O & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & O \\ O & S \end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & O \\ O & R^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & J \\ O & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & O \\ O & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & O \\ O & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & K \\ O & I_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q^{-1} & O \\ O & S^{-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & AQKS^{-1}+P^{-1}JRB \\ O & B \end{pmatrix}.$$

所以，

$$C=A(QKS^{-1})-(-P^{-1}JR)B.$$

于是，$X=QKS^{-1}$及$Y=-P^{-1}JR$是矩阵方程$AX-YB=C$的一个解.

4 单 Artinian 环上矩阵方程 $AX-YB=C$ 的解

设R是一个单 Artinian 环. 本段将给出矩阵方程

$$AX-YB=C \tag{15}$$

有解的两个充要条件及其解集结构.

引理1 设$A\in R^{m\times s}$，$B\in R^{t\times n}$及$C\in R^{m\times n}$，则

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B \tag{16}$$

的充要条件为

$$(I_m-AA^{(1)})C(I_n-B^{(1)}B)=O.$$

证明 由第一章 § 2定义6及定理12立即得证.

定理6 设$A\in R^{m\times s}$，$B\in R^{t\times n}$，$C\in R^{m\times n}$，则对于矩阵方程(15)，以下条件等价：

(i) 矩阵方程(15)有解；

(ii) $(I_m-AA^{(1)})C(I_n-B^{(1)}B)=O$；

(iii) $\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$等价.

证明 由(16)式可得

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

从而，$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$等价，于是由引理1知(ii)⇔(iii).

下证(i)⇔(ii).

(ii)的必要性可由$(I_m - AA^{(1)})$与$(I_n - B^{(1)}B)$分别左乘和右乘(15)式两端得到.

反之，若(*ii*)成立，则它等价于下式

$$AA^{(1)}C - (I_m - AA^{(1)})CB^{(1)}B = C.$$

从而，$X = A^{(1)}C$，$Y = (I_m - AA^{(1)})CB^{(1)}$是(15)的一个解. □

定理7 设矩阵方程(15)有解，则其一般解为

$$X = A^{(1)}C + A^{(1)}NB + (I_s - A^{(1)}A)M, \tag{17}$$

$$Y = (AA^{(1)} - I_m)CB^{(1)} + N - (I_m - AA^{(1)})NBB^{(1)}, \tag{18}$$

其中，$N \in R^{m\times t}$，$M \in R^{s\times n}$是任意的.

证明 因矩阵方程(15)有解，故由定理6知

$$(I_m - AA^{(1)})C(I_n - B^{(1)}B) = O,$$

亦即

$$AA^{(1)}C + (I_m - AA^{(1)})CB^{(1)}B = C. \tag{19}$$

将(17)、(18)代入(15)并利用(19)即知，对于任意的$N \in R^{m\times t}$和$M \in R^{s\times n}$，(17)及(18)满足(15). 为证(17)、(18)构成(15)的通解，我们固定$X_0 \in R^{s\times n}$和$Y_0 \in R^{m\times t}$，使

$$AX_0 - Y_0B = C. \tag{20}$$

取$M = X_0$，$N = Y_0$，则(17)与(18)分别变为

$$X = X_0 - A^{(1)}(AX_0 - Y_0B - C)$$

和

$$Y = Y_0 - (I_m - AA^{(1)})(Y_0B + C)B^{(1)}.$$

但由(20)，它们即$X = X_0$和$Y = Y_0$，从而，

$$X_0 = A^{(1)}C + A^{(1)}Y_0B + (I_s - A^{(1)}A)X_0,$$

$$Y_0 = (AA^{(1)} - I_m)CB + Y_0 - (I_m - AA^{(1)})Y_0BB^{(1)}. \quad □$$

推论2 设$A \in R^{m\times s}$，$C \in R^{m\times n}$，则矩阵方程$AX = C$有解的充

要条件是 $AA^{(1)}C=C$. 有解时，它的一般解为

$$X=A^{(1)}C+(I_s-A^{(1)}A)M,$$

其中 $M\in R^{s\times n}$是任意的.

推论3 设 $B\in R^{t\times n}$，$C\in R^{m\times n}$，则矩阵方程 $YB=C$ 有解的充要条件是 $CB^{(1)}B=C$. 有解时，其一般解为

$$Y=CB^{(1)}-N(I_t-BB^{(1)}),$$

其中 $N\in R^{m\times t}$是任意的.

5 交换环上的 Roth 定理

本段设 R 是一个含幺交换环. 我们将使用标准的交换代数方法，把证明 Roth 的等价与相似定理在 R 上成立简化到在 Artinian 环上成立.

我们先考虑线性方程

$$AX=B \tag{21}$$

其中 $A\in R^{m\times n}$，$B\in R^{m\times 1}$是已知的，$X\in R^{n\times 1}$是未知的.

引理2[76] 方程组(21)有解当且仅当它在 R 在其每个最大理想 M 处的局部化 R_M 上有解.

引理3[76] 设 R 是一个局部的 Noetherian 环，并且有最大理想 M 和 M 进完备(M-adic completion)R^*，则(21)在 R 上有解当且仅当它在 R^* 上有解.

引理4[76] 设 R 是一个完备的局部 Noetherian 环，并且有最大理想 M，则(21)在 R 上有解当且仅当它在 Artinian 环 R/M^k($k\geqslant 1$)上有解.

下面我们仅给出 Roth 等价定理在 R 上成立，同理可证 Roth 相似定理在 R 上也成立.

设 $AX-YB=C$ 在 R 上有解 X,Y，则

$$\begin{pmatrix} I & Y \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -X \\ O & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

故

$$P=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \text{与} P_1=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

等价.

反之,设 P 与 P_1 等价,欲求 X,Y,使 $AX-YB=C$. 此矩阵方程可视为由 X 与 Y 的元素组成的一个线性方程组. 令 $UP=P_1W$, U,W 均可逆. 现在,我们用由 P,U,W,U^{-1} 及 W^{-1} 的元素生成的含幺子环去代替 R,这个子环是 Noetherian 环. 由引理2、引理3及引理4,我们只须证明 Roth 等价定理在 Artinian 环上成立. 故设 R 是一个 Artinian 环. 设 $G\in R^{a\times b}$, $H\in R^{c\times d}$,且

$$E(G,H)=\{(T,S)\mid T\in R^{c\times a}, S\in R^{d\times b}, TG=HS\}.$$

显然,$E(G,H)$ 是 $R^{c\times a}\times R^{d\times b}$ 的 R-子模. 如果 G 与 G' 等价,即有可逆阵 U 和 W 使 $G'=UGW$,则有一个同构

$$f:E(G,H)\to E(G',H);\ f(T,S)=(TU^{-1},SW).$$

特别地,对于 Roth 等价定理中的矩阵,我们有

$$E(P,A)\cong E(P',A).$$

由定义,$E(P',A)$ 包含所有矩阵对 (T,S) 满足

$$TP=AS, T\in R^{m\times(m+s)}, S\in R^{r\times(r+n)}.$$

令

$$T=(T_1,T_2), S=(S_1,S_2),$$

其中 $T_1\in R^{m\times m}$, $T_2\in R^{m\times s}$, $S_1\in R^{r\times r}$ 及 $S_2\in R^{r\times n}$,则当

$$(T_1A,T_2B)=(AS_1,AS_2)$$

时恰有

$$(T,S)\in E(P',A).$$

故

$$E(P,A)\cong E(P',A)\cong E(A,A)\oplus E(B,A). \tag{22}$$

同理,我们可将 $E(P,A)$ 中的 (T,S) 作如上分块,则必有

$$(T,S)\in E(P,A)$$

当且仅当

$$(T_1A, T_1C+T_2B)=(AS_1, AS_2).$$

从而,我们定义映射

$$g: E(P,A)\to E(A,A),$$

其中,

$$g((T_1,T_2),(S_1,S_2))=(T_1,S_1).$$

显然,$\mathrm{Ker}g=E(B,A)$. 现在,$E(P,A)$的(合成)长度是 $\mathrm{Ker}g$ 和 $g(E(P,A))$的长度的和. 于是再由(22)可知,g 必定是满射. 模 $E(A,A)$包含矩阵对(I_m,I_r). 故存在 Y 和 X 有

$$((I_m,Y),(I_r,X))\in E(P,A).$$

综上,有 $C+YB=AX$,即 $AX-YB=C$. □

6 Roth 定理的扩展

设 R 是一个含幺环,$R[x_1,\cdots,x_n]$是 R 上的多项式环,其中 x_i 与 R 中的每个元素可换. 若$\{C_i|1\leqslant i\leqslant r\}$和$\{D_i|1\leqslant i\leqslant r\}$是 R 上的 $m\times n$ 矩阵的一些集合,当 $UC_iV=D_i$, $1\leqslant i\leqslant r$, $U\in GL_m(R)$及 $V\in GL_n(R)$时,则记$\{C_i\}\sim\{D_i\}$;当 $m=n$,且对某 $U\in GL_n(R)$有 $UC_iU^{-1}=D_i$, $1\leqslant i\leqslant r$ 时,记$\{C_i\}\approx\{D_i\}$. 如果 Roth 等价(相似)定理在 R 上成立,我们就说 R 满足 Roth 等价(相似)性质. 本段的主要目的就是证明多个矩阵的 Roth 定理在含交换环上成立.

引理5 (*i*) 若$\{C_i|1\leqslant i\leqslant r\}\cup\{D_i|1\leqslant i\leqslant r\}\subseteq R^{m\times n}$,则$\{C_i\}\sim\{D_i\}\Leftrightarrow\sum x_iC_i$ 与 $\sum x_iD_i$ 在 $R[x_1,\cdots,x_r]$上等价.

(ii) 如果 $m=n$, $C_0=D_0=I_n$,则

$$\{C_i|0\leqslant i\leqslant r\}\sim\{D_i|0\leqslant i\leqslant r\}\Leftrightarrow\{C_i|1\leqslant i\leqslant r\}\approx\{D_i|1\leqslant i\leqslant r\}.$$

(iii) 如果 $m=n$,则$\{C_i\}\approx\{D_i\}\Leftrightarrow\sum x_iC_i$ 与 $\sum x_iD_i$ 在 $R[x_1,\cdots,x_r]$上相似.

证明 (i) 若$\{C_i\}\sim\{D_i\}$,则结果是显然的. 反之,设 $U\widetilde{C}=$

$\widetilde{D}V$，其中 $U\in GL_m(R[x_1,\cdots,x_r])$ 及 $V\in GL_n(R[x_1,\cdots,x_r])$，$\widetilde{C}=\sum x_iC_i,\widetilde{D}=\sum x_iD_i$. 记

$$U=U_0+\cdots+U_d,V=V_0+\cdots+V_d,$$

其中 U_i 与 V_i 关于次数 i 是齐次的. 于是，$U_0C_i=D_iV_0,1\leqslant i\leqslant r$. 此外，$U_0(U^{-1})_0=I_m$ 及 $V_0(V^{-1})_0=I_n$，所以 U_0和 V_0是 R 上的可逆矩阵. 从而(i)获证.

(ii)是显然的. (iii)可由(i)和(ii)或由(i)的证明即得. □

定理8　设

$$M_i=\begin{pmatrix}A_i & C_i\\ O & B_i\end{pmatrix},N_i=\begin{pmatrix}A_i & O\\ O & B_i\end{pmatrix},$$

$1\leqslant i\leqslant t$，其中 $A_i\in R^{m\times r},B_i\in R^{s\times n}$及 $C_i\in R^{m\times n}$.

(i)　如果 $R[x_1,\cdots,x_t]$满足 Roth 的等价性质，则$\{M_i\}\sim\{N_i\}\Leftrightarrow$存在 $X\in R^{r\times n}$及 $Y\in R^{m\times s}$使得 $C_i=A_iX-YB_i,1\leqslant i\leqslant r$.

(ii)　如果 $R[x_1,\cdots,x_t]$满足 Roth 的相似性质且 $m=r,n=s$，则$\{M_i\}\approx\{N_i\}\Leftrightarrow C_i=A_iX-XB_i,1\leqslant i\leqslant r,X\in R^{m\times n}$.

(iii)　若 R 对 $t+1$个矩阵同时满足 Roth 等价性质(定理8(i))，则 R 对 t 个矩阵同时满足 Roth 相似性质(定理8(ii)).

证明　设 X 和 Y 存在，令

$$U=\begin{pmatrix}I & Y\\ O & I\end{pmatrix},V=\begin{pmatrix}I & X\\ O & I\end{pmatrix},$$

则 U 和 V 是可逆的，且 $UM_i=N_iV,1\leqslant i\leqslant r$. 反之，我们仅用引理5的(i)及第5段 Roth 在交换环上的等价定理即得 $\widetilde{C}=\widetilde{A}\widetilde{X}-\widetilde{Y}\widetilde{B}$(在 $R[x_1,\cdots,x_t]$上)，其中，$\widetilde{A}=\sum x_iA_i,\widetilde{B}=\sum x_iB_i$ 及 $\widetilde{C}=\sum x_iC_i$. 于是，$C_i=A_iX-YB_i,1\leqslant i\leqslant r$，其余 X 和 Y 是 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 的零次项.

同理可证(ii). (iii)由引理5的(iii)立得.

推论4　设 R 是交换环上的一个模有限代数，则 R 满足联立的 Roth 相似和等价性质.

最后请读者证明下面的

定理9 设 R 是一个交换环，$A_i\in R^{m\times m}, B_i\in R^{n\times n}, C_i\in R^{m\times m}$，$1\leqslant i\leqslant r$. 令

$$M_i=\begin{pmatrix} A_i & C_i \\ O & B_i \end{pmatrix}, N_i=\begin{pmatrix} A_i & O \\ O & B_i \end{pmatrix},$$

则 $\{M_i\}\approx\{N_i\}\Leftrightarrow$ 存在 $X\in R^{m\times n}$ 使 $C_i=A_iX-XB_i, 1\leqslant i\leqslant r$.

注 我们还可将 Roth 的等价定理推广到中心包含一个域的环上[57].

§7 伴侣矩阵的 Roth 消去律及其应用

上一节，我们介绍并推广了 Roth 消去律，即矩阵方程

$$AX-XD=C$$

有解当且仅当利用相似变换可将分块阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & D \end{pmatrix}$$

中的 C 消掉. 本节将导出伴侣矩阵的 Roth 消去律，并由此给出循环分解定理及域 F 上的 Roth 相似定理的简捷证明.

设 $R(A)$、$N(A)$、$\Delta_A(\lambda)$、$\psi_A(\lambda)$ 分别表示 $A\in F^{n\times n}$ 的值域、核、特征多项式、最小多项式. $X\in F^{n\times 1}$ 相对于 A 的最小多项式记为 $\psi_x(A)$. 当 $\psi_x(\lambda)=\psi_A(\lambda)$ 时，称 x 属于 ψ_A，$\sigma(A)$ 为 A 的拉直，"$\otimes$"表示右直积(第一章§6). 对于首1多项式

$$f(\lambda)=f_0+f_1\lambda+\cdots+\lambda^k,$$

设

$$L[f(\lambda)]=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & -f_0 \\ 1 & \cdots & -f_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 1 & -f_{k-1} \end{bmatrix},$$

$$S[f(\lambda)]=\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_k \\ f_2 & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ f_k & & & \end{pmatrix},$$

并令

$$T_i(\lambda)=f_{i+1}+f_{i+2}\lambda+\cdots+f_k\lambda^{k-i-1},i=0,1,\cdots,k-1. \tag{1}$$

易验知

$$LS=SL', \tag{2}$$

且对任意的向量 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_{k-1})'$，有

$$(x,Lx,\cdots,L^{k-1}x)=x(L), \tag{3}$$

其中 $x(\lambda)=x_0+x_1\lambda+\cdots+x_{k-1}\lambda^{k-1}$.

由上式，得到下面的重要结果：

$$\sigma(I,L,L^2,\cdots,L^{k-1})=\sigma\begin{pmatrix} I \\ L \\ L^2 \\ \vdots \\ L^{k-1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

我们将用到下面的事实

$$(S\otimes I)\sigma(I)=(I\otimes S)\sigma(I). \tag{5}$$

如果 $f(D)=0$，则由带余除法，

$$(\lambda I-D)\left(\sum_{i=0}^{k-1}D_i\lambda^i\right)=f(\lambda)I,$$

其中，

$$D_i=T_i(D)=\sum_{j=0}^{k-i-1}f_{i+j+1}D^j,i=0,1\cdots,k-1. \tag{6}$$

此外，我们有链条件[76,P.105]：

$$D[I,D,\cdots,D^{k-1}]=[I,D,\cdots,D^{k-1}](L[f(\lambda)]\otimes I)$$

$$=[I,D,\cdots,D^{k-1}](I\otimes D), \tag{7}$$

及

$$[D_0,D_1,\cdots,D_{k-1}]=[I,D,\cdots,D^{k-1}](S[f(\lambda)]\otimes I). \tag{8}$$

1 最小多项式

本段我们将导出关于分块三角阵的最小多项式的几个初等结果.

引理1 设

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_k \end{pmatrix},$$

$$N=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_k),$$

并令

$$T_{ij}=\mathrm{diag}(A_i,A_{i+1},\cdots,A_j),$$

$$S_{ij}=\begin{pmatrix} A_i & & & * \\ & A_{i+1} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_j \end{pmatrix}$$

分别是 N 和 M 的截口,则

$$\mathrm{lcm}(\psi_{A_1},\cdots,\psi_{A_k})\mid\psi_M(\lambda)\mid\prod_{i=1}^{k}\psi_{A_i}(\lambda), \tag{8}$$

$$\psi_N(\lambda)=\mathrm{lcm}(\psi_{A_1},\cdots,\psi_{A_k}); \tag{9}$$

如果 $M\approx N$,则

$$\psi_{S_{ij}}(\lambda)=\psi_{T_{ij}}(\lambda)=\mathrm{lcm}(\psi_r:i\leqslant r\leqslant j). \tag{10}$$

其中 $\mathrm{lcm}(f,g)$ 表示多项式 f 与 g 的最小公倍式.

证明 (8)与(9)的证明留给读者,下证(10).

首先，易知 $\operatorname{rank}M \geqslant \operatorname{rank}N = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rank}A_i$，令

$$p(\lambda) = \psi_{T_{ij}}(\lambda),$$

则由(8)，$p \mid \psi_{S_{ij}}$. 另一方面，

$$p(M) = \begin{pmatrix} p(A_1) & & & & * \\ & \ddots & & & \\ & & p(S_{jj}) & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & p(A_k) \end{pmatrix}$$

$$\approx p(N) = \begin{pmatrix} p(A_1) & & & & O \\ & \ddots & & & \\ & & p(N_{ij}) & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & p(A_k) \end{pmatrix},$$

其中 $p(N_{ij}) = 0$. 故

$$\operatorname{rank}(p(N)) = \sum_{\substack{t<i \\ t>j}} \operatorname{rank} p(A_t) = \operatorname{rank} p(M)$$

$$\geqslant \sum_{\substack{t<i \\ t>j}} \operatorname{rank}(pA_k) + \operatorname{rank} p(S_{ij}).$$

从而 $p(S_{ij}) = 0$ 及 $\psi_{S_{ij}} \mid p$. □

引理2 设

$$M = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_m \end{pmatrix} & C \\ O & \begin{pmatrix} D_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & D_n \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$$N=\begin{pmatrix} A_1 & & & & & O \\ & \ddots & & & & \\ & & A_m & & & \\ & & & D_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ O & & & & & D_n \end{pmatrix}$$

其中 $C=(C_{ij})$ 为相容分块，令

$$W_{ij}=\begin{pmatrix} A_i & C_{ij} \\ O & D_j \end{pmatrix},$$

$$S_{ij}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_m \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C_{i1} & \cdots & C_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mj} \end{pmatrix} \\ O & \begin{pmatrix} D_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & D_j \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

如果 $M\approx N$，则

$$\operatorname{lcm}(\psi_{A_i},\psi_{D_j})\mid\psi_{W_{ij}}\mid\operatorname{lcm}(\psi_{A_t}:t\geqslant i,\psi_{D_u}:u\leqslant j).$$

证明 由(8)知第一部分是显然的. 由(10)，

$$\psi_{S_{ij}}=\operatorname{lcm}(\psi_{A_t}:t\geqslant i,\psi_{D_u}:u\leqslant j).$$

对任意的多项式 $q(\lambda)$，

$$q(S_{ij})=\begin{pmatrix} q(A_i) & \hat{C}_{ij} \\ O & q(D_j) \end{pmatrix},$$

其中 $\hat{C}_{ij}$ 正是 $q(W_{ij})$ 中的(1,2)块，故 $q(S_{ij})=O\Rightarrow q(W_{ij})=O$ 及 $\psi_{W_{ij}}\mid\psi_{S_{ij}}$. □

引理3 如果

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & D \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} A & O \\ O & E \end{pmatrix},$$

则 $\psi_D | \psi_E$.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \psi_E(A) & * \\ O & \psi_E(D) \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \psi_E(A) & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \psi_E(D) = 0 \Rightarrow \psi_D | \psi_E.$$

此外，若 $C=O$，则由对称性知 $\psi_D=\psi_E$.

2 几个预备结果

令

$$M=\begin{pmatrix} A & C \\ O & D \end{pmatrix},$$

$f(\lambda)=f_0+f_1\lambda+\cdots+\lambda^k$ 是域 F 上的一个首1多项式，则易知

$$f(M)=\begin{pmatrix} f(A) & \widetilde{C} \\ O & f(D) \end{pmatrix},$$

其中，

$$\begin{aligned} \widetilde{C} &= \widetilde{H}(C)=f_1C+f_2(AC+CD)+\cdots \\ &\quad +(A^{k-1}C+A^{k-2}CD+\cdots+CD^{k-1}) \\ &=(I,A,\cdots,A^{k-1})(S\otimes C)\begin{pmatrix} I \\ D \\ \vdots \\ D^{k-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

令 $\widetilde{G}(X)=AX-XD$. 显然，$\widetilde{G}$ 和 $\widetilde{H}$ 是 $F^{n\times m}$上的两个线性映射.

引理4 设 $f(A)=O$，$f(D)=O$，则 $R(\widetilde{G})\subseteq N(\widetilde{H})$.

证明 显然，$f(M)=O \Leftrightarrow f(A)=O$，$f(D)=O$ 及 $\widetilde{C}=O$. 若 $C=AX-XD$ 及 $f(A)=O$，$f(D)=O$，则可交替使用(11)式、(2)式和(7)式，即能证得

$$\begin{aligned} \widetilde{C} &= \widetilde{H}(C)=(f_1A+f_2A^2+\cdots+A^k)-(f_1D+\cdots+D^k) \\ &=-f_0X+f_0X=O. \ \square \end{aligned}$$

3 伴侣矩阵的 Roth 消去律

定理1 设

$$M=\begin{pmatrix} A & O \\ B & D \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix},$$

其中

$$A=L[f(\lambda)], f(\lambda)=f_0+f_1\lambda+\cdots+\lambda^n.$$

若

$$f(M)=O,$$

则

$$DY-YA=B=(b_1,\cdots,b_n)$$

有解

$$Y=-(0,b_1,Db_1+b_2,\cdots,D^{n-2}b_1+D^{n-3}b_2+\cdots+b_{n-1}).$$

证明 因 $g(M)=O$ 意味着 $g(A)=O$，故 $f|g$. 从而，$\psi_M=f(\lambda)$. 由(11)知，$f(M)=O$ 当且仅当 $f(A)=O$，$f(D)=O$ 及

$$\widetilde{B}=(I,D,\cdots,D^{n-1})(S\otimes\dot{B})\begin{pmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{pmatrix}=O,$$

其中 $S=S[f(\lambda)]$.

$\widetilde{B}=O$ 可改写为 $\tilde{b}=Hb=O$，其中 $b=\sigma(B)$ 及

$$H=\sum_{i,j=0}^{n-1}(A')^i f_{i+j+1}\otimes D^j=\sum_{i=0}^{n-1}A'_i\otimes D_i, \tag{12}$$

$$A_i=T_i(A)=\sum_{j=0}^{n-j-1}f_{i+k+1}A^j, i=0,1,\cdots,n-1. \tag{13}$$

在等式

$$(\lambda I-A')\mathrm{adj}(\lambda I-A')=f(\lambda)I \tag{14}$$

中，用 D 去代替 λ，由此可得出

$$(I\otimes D-A'\otimes I)(\sum_{i=0}^{n-1}A'_i\otimes D^i)=GH=O. \qquad (15)$$

同样 $HG=O$. 由此显有 $R(G)\subseteq N(H)$. 下证 $R(G)=N(H)$，易验知，若

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}(f_0(\lambda),f_1(\lambda),\cdots,f_{n-2}(\lambda)) & 1\\ -I & 0\end{pmatrix}$$

及

$$K(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & & & O\\ \lambda & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \lambda^{n-1} & \cdots & \lambda & 1\end{bmatrix},$$

则

$$R(\lambda)(\lambda I-A')K(\lambda)=\begin{bmatrix}f(\lambda) & & & O\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & 1\end{bmatrix} \qquad (16)$$

及

$$\mathrm{adj}(\lambda I-A')=K(\lambda)\begin{bmatrix}1 & & & & O\\ & f(\lambda) & & & \\ & & f(\lambda) & & \\ & & & \ddots & \\ O & & & & f(\lambda)\end{bmatrix}R(\lambda).$$

用 D 代替 λ 并由 $f(D)=O$ 可得

$$R(D)GK(D)=\begin{bmatrix}O & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I\end{bmatrix}=I-E, \qquad (17)$$

及

$$H=K(D)\begin{pmatrix} I & & & \\ & O & & \\ & & \ddots & \\ & & & O \end{pmatrix}R(D).$$

易知

$$Hb=O\Leftrightarrow ER(D)b=O\Leftrightarrow b=R^{-1}(D)(I-E)R(D)b$$
$$\Leftrightarrow b=GK(D)R(D)b\Leftrightarrow b=Gy$$

（对某个 y）．故

$$R(G)=N(H),$$

且

$$DY-YA=B$$

有解

$$Y=\sigma^{-1}([K(D)R(D)]b).\ \square$$

注1　$R(H)=N(G)$也成立．

注2　$T=K(D)R(D)$是G的一个广义$\{1\}$逆；

$$I-GT=H^{(1)}H,$$

其中 $H^{(1)}=R^{(1)}(D)EK^{-1}(D)$．

注3　本段结果在含幺交换环上亦成立．

若 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则上面的解 Y 有如下形式

$$Y=\sigma^{-1}\left(\begin{pmatrix} I & & & \\ D & I & & \\ \vdots & & \ddots & \\ D^{n-1} & \cdots & D & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V \\ -b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}\right)$$

$$=(V,DV,\cdots,D^{n-1}V)-(O,b_1,Db_1+b_2,\cdots,D^{n-2}b_1+\cdots+b_{n-1}),\qquad(18)$$

其中，

$$V=f_0(D)b_1+f_1(D)b_2+\cdots+f_{n-1}(D)b_n$$
$$=D_0b_1+D_1b_2+\cdots+D_{n-1}b_n$$

及 $D_i=f_i(D), i=0,1,\cdots,n-1$. 由(8)式,

$$V=(I,D,\cdots,D^{n-1})(S\otimes I)b,$$

再由(4),即有

$$(S\otimes I)b=(S\otimes B)\sigma(I)=(S\otimes B)\begin{bmatrix} I \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix} e_1.$$

于是, $V=\widetilde{B}e_1=O$. 故

$$\begin{aligned} Y &= -(O,b_1,Db_1+b_2,\cdots,D^{n-2}b_1+D^{n-3}b_2+\cdots+b_{n-1}) \\ &= -(I,D,\cdots,D^{n-1})(I\otimes B)\begin{bmatrix} J' \\ (J')^2 \\ \vdots \\ (J')^n \end{bmatrix} \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} D^i B(J')^{i+1}, \end{aligned} \tag{19}$$

其中

$$J=\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ 1 & & \ddots & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix}.$$

推论1 设

$$M=\begin{pmatrix} A & O \\ B & D \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix},$$

$$A=L[f(\lambda)],$$

$$h(M)=O, h=f(\lambda)r(\lambda)$$

是首1的,且

$$(\psi_D(\lambda),r(\lambda))=1,$$

则矩阵方程

$$DY-YA=B$$

相容.

推论2 设

$$M=\begin{pmatrix} A & O \\ B & D \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix},$$

$A=L[f(\lambda)]$及$f(M)=O$,则$AX-XD=C$有解

$$X=\widetilde{P}(I\otimes C)\widetilde{D}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}P^iCD^j \tag{20}$$

其中

$$\widetilde{P}=(P,P^2,\cdots,P^n),\widetilde{D}=\begin{pmatrix} I \\ D \\ \vdots \\ D^{n-1} \end{pmatrix},P=SJS^{-1},$$

$$J=\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix},S=\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_2 & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ f_n & & & \end{pmatrix}.$$

证明 令$\mathcal{J}=(J,J^2,\cdots,J^n)$,则由(2)及(7),

$$AX-XD=(A\widetilde{P}-\widetilde{P}(A'\otimes I))(I\otimes C)\widetilde{D}$$
$$=S(A'\mathcal{J}-\mathcal{J}(A'\otimes I))(I\otimes S^{-1})(I\otimes C)\widetilde{D}.$$
$$A'\mathcal{J}-\mathcal{J}(A'\otimes I)=(I,O,\cdots,O)-e_n(e'_1S,e'_2S,\cdots,e'_nS),$$

上式中的第2项由(5)式可简化为

$$-e_n\sigma(I)'(S\otimes I)=-e_ne'_1(I,A',\cdots,(A')^{n-1})(S\otimes I)$$
$$=-E_{n1}S^{-1}\widetilde{Q}(S\otimes I)(I\otimes S),$$

其中$\widetilde{Q}=(I,A,\cdots,A^{n-1})$. 故再由(11),知

$$AX-XD=S(I,O,\cdots,O)(I\otimes S^{-1})(I\otimes C)\widetilde{D}$$
$$-SE_{n1}S^{-1}\widetilde{Q}(S\otimes I)(I\otimes C)\widetilde{D}$$

$$=(I,O,\cdots,O)(I\otimes C)\widetilde{D}-SE_{n1}S^{-1}\widetilde{Q}(S\otimes C)\widetilde{D}$$

$$=C. \square$$

注4 (20)式也可对矩阵

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C'S^{-1} & D' \end{pmatrix} 及 \begin{pmatrix} A & O \\ O & D' \end{pmatrix}$$

使用定理1得到，详细过程请读者完成.

注5 矩阵 $P=SJP^{-1}$ 可使用

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} e'_n \\ e'_nA \\ \vdots \\ e'_nA^{n-1} \end{pmatrix}$$

化为如下形式

$$P=S\begin{pmatrix} o' \\ e'_n \\ e'_nA \\ \vdots \\ e'_nA^{n-2} \end{pmatrix}.$$

如果令 $J=L+fe'_n$，其中 $f'=(f_0,f_1,\cdots,f_{n-1})'$，则

$$P=I+Sfe'_nS^{-1}=I+Sfe'_nA^{n-2}.$$

同样，$SE_{n1}S^{-1}$ 可化为 E_{1n}.

推论3 设

$$M=\begin{pmatrix} A & O \\ B & D \end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix},$$

$A=L(p^k)$，$D=L(q^l)$，p,q 为互素的多项式，则以下条件等价：

(i) $DY-YA=B$ 相容；

(ii) $M\approx N$；

(iii) $\psi_M=\psi_N$.

4 循环分解定理

本段我们利用伴侣矩阵的 Roth 消去律给出循环分解定理的一个构造性的简洁证明.

定理2 设 $A\in F^{n\times n}$,则

$$A\approx A_I=\begin{pmatrix} L(\psi_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & L(\psi_r) \end{pmatrix},$$

其中 $\psi_1=\psi_A=f_0+f_1\lambda+\cdots+\lambda^k$,$\psi_{i+1}|\psi_i$,$i=1,2,\cdots,r-1$.

证明 设 $A=A_1$ 及 $\psi_A=\psi_1$. 由原始的分解定理我们知道,存在向量 x 满足 $\psi_x=\psi_1$. 选择

$$(x,Ax,\cdots,A^{k-1}x)$$

作为基本矩阵 Q 的前半部分,则

$$AQ=Q\begin{pmatrix} L(\psi_1) & C_1 \\ O & A_2 \end{pmatrix}.$$

因为 $\psi_1=\psi_A$,故有 $\psi_1(A_2)=O$ 及 $\psi_{A_2}|\psi_1$. 于是可使用推论2,并有

$$A\approx\begin{pmatrix} L(\psi_1) & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}.$$

对 A_2 重复上述过程即得所需标准形. 若

$$\begin{pmatrix} L(\psi_1) & & & O \\ & L(\psi_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & L(\psi_r) \end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix} L(\phi_1) & & & \\ & L(\phi_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & L(\phi_s) \end{pmatrix},$$

其中 $\psi_1=\phi_1=\psi$ 及 $\psi_{i+1}|\psi_i$,$\phi_{i+1}|\phi_i$,则由引理3知,

$$\begin{pmatrix} L(\psi_2) & & O \\ & \ddots & \\ O & & L(\psi_r) \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} L(\phi_2) & & O \\ & \ddots & \\ O & & L(\phi_s) \end{pmatrix}$$

有相同的最小多项式，即 $\psi_2=\phi_2$，于是可得标准形的唯一性. □

5 Roth 相似定理

本段利用伴侣矩阵的 Roth 消去律，给出矩阵方程

$$AX-XD=C$$

的一种构造求解算法，设

$$M=\begin{pmatrix} A & C \\ O & D \end{pmatrix} \text{及} N=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

不失一般性，由循环分解定理可设

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_m \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} D_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & D_n \end{pmatrix},$$

其中 $A_i=L(p_i^{k_i})$ 及 $D_j=L(q_j^{l_j})$. 令 $P_i^{k_i}$ 的初等因子按递减顺序排序，因此每当 $p_{i+1}=p_i$ 时，总有 $k_i \geqslant k_{i+1}$；D 的初等因子以递增顺序排序，于是每当 $q_{j+1}=q_j$ 时，总有 $l_j \leqslant l_{j+1}$. 设 $C=(C_{ij})$ 相容分块. 熟知，如果

$$A_iX_{ij}-X_{ij}D_j=C_{ij} \tag{21}$$

对每个 i 和 j 皆有解，则分块阵 $X=(X_{ij})$ 是 $AX-XD=C$ 的解. 考虑下面两种情况：

(i) $p_i \neq q_j$. 此时，$(p_i,q_j)=1$ 及 (21) 有唯一解（见文[93, p. 171]），它可表成分块双线性解.

(ii) $p_i=q_j$. 设

$$W_{ij}=\begin{pmatrix} A_i & C_{ij} \\ O & D_j \end{pmatrix} \text{及}$$

$$S_{ij}=\left(\begin{array}{cccc:ccc} A_i & & & O & C_{i1} & \cdots & C_{ij} \\ & A_{i+1} & & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & & & & \\ O & & & A_m & C_{m1} & \cdots & C_{mj} \\ \hdashline & & & & D_1 & & O \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & O & & D_j \end{array}\right),$$

则由引理1中的(8)知，$\psi_{W_{ij}}=p_i^t$，其中 $t=\max(k_i,l_i)$. 另一方面，由引理2，$\psi_{W_{ij}}|\psi_{S_{ij}}$，其中

$$\psi_{S_{ij}}=\mathrm{lcm}(\psi_{A_u}:u\geqslant i,\psi_{D_v}:v\leqslant j).$$

通过这种方式，这些初等因子被排序，且

$$\psi_{S_{ij}}(\lambda)=\mathrm{lcm}(\psi_{A_i},\psi_{D_j})r(\lambda),$$

其中 $r(\lambda)$与第一个因子互素. 故

$$\psi_{W_{ij}}=\mathrm{lcm}(\psi_{A_i},\psi_{D_j}).$$

此示，我们可以独立地将定理1或推论2应用到每一个 W_{ij}，这一过程中无须改变矩阵 C_{ij}. 所以，不用任何进一步的运算，就可将 C_{ij} 一一消掉，(21)对每个 i 和 j 均有解. □

§8 矩阵方程 $AX-XB=C$ 的常见解法

矩阵方程

$$AX-XB=C \tag{1}$$

在代数和应用数学中起重要作用，本节主要介绍矩阵方程(1)的连分式解法[82]、最小多项式解法[83]及矩阵的反演解法.

1 矩阵方程(1)的连分式解法

设 $F[x]$表示数域 F 上的多项式环，若 $F[x]$中的 $f(x)$与 $g(x)$互素，且 $\deg f(x)\geqslant 1$，则称 F 上分式$\frac{g(x)}{f(x)}$为严格既约. 通过

Euclidean 算法作连分式

$$\frac{g(x)}{f(x)}=g_0(x)+\cfrac{1}{e_1(x)+\cfrac{1}{e_2(x)+\cdots+\cfrac{1}{e_r(x)}}},\tag{2}$$

其中 $g_0(x)\in F[x]$，又所有 $e_k(x)\in F[x]$，$\deg e_k(x)\geqslant 1$. 令(2)式的渐近分式为$\frac{g_k(x)}{f_k(x)}$，这里 $f_0(x)=g_{-1}(x)=1, f_{-1}(x)=0$，又

$$f_{k+1}(x)=e_{k+1}(x)f_k(x)+f_{k-1}(x),$$
$$g_{k+1}(x)=e_{k+1}(x)g_k(x)+g_{k-1}(x),(k=0,1,\cdots,r-1).\tag{3}$$

令

$$e_{k+1}(x,\mu)=(e_{k+1}(x)-e_{k+1}(\mu))(x-\mu)^{-1}$$

为 x,μ 的二元多项式.

对任何 $\varphi(x)\in F[x]$，记 $\varphi(x)$的首项为 $L\varphi(x)$. 易知，

$$Lf_k(x)=L(e_1(x)e_2(x)\cdots e_k(x)).\tag{4}$$

又当 $g_0(x)$不为0时，

$$Lg_k(x)=L(g_0(x)e_1(x)e_2(x)\cdots e_k(x)).\tag{5}$$

分别令 $f(x),f_r(x)$的首项系数为 a_0,ξ_r，于是，

$$f_r(x)=\frac{\xi_r}{a_0}f(x),g_r(x)=\frac{\xi_r}{a_0}g(x).\tag{6}$$

引理1 连分式(2)满足

$$(x-\mu)h(x,\mu)=1+(-1)^r\frac{\xi_r}{a_0}(f_{r-1}(x)g(\mu)-f(x)g_{r-1}(\mu)),\tag{7}$$

这里，

$$h(x,\mu)=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k f_k(x)e_{k+1}(x,\mu)g_k(\mu).\tag{8}$$

证明 令

$$M_k(x,\mu)=(-1)^k(f_k(x)g_{k-1}(\mu)-f_{k-1}(x)g_k(\mu)),$$

$k=0,1,\cdots,r$. 显然，$M_0(x,\mu)=1$，又由(6)式得

$$M_r(x,\mu)=(-1)^r\frac{\xi_r}{a_0}(f(x)g_{r-1}(\mu)-f_{r-1}(x)g(\mu)). \qquad (9)$$

由(3)式导出

$$M_k(x,\mu)-M_{k+1}(x,\mu)=(-1)^k(x-\mu)f_k(x)e_{k+1}(x,\mu)g_k(\mu),$$

$(k=0,1,\cdots,r-1)$. 将上述诸式相加，据(8)式有

$$1-M_r(x,\mu)=(x-\mu)h(x,\mu).$$

把(9)式代入上式，最后得出(7)式. □

当 $\mu=x$ 时，(7)式变为

$$f(x)g_{r-1}(x)-g(x)f_{r-1}(x)=(-1)^r\frac{a_0}{\xi_r}. \qquad (10)$$

以下令 $F^{n\times m}$ 内线性算子 $\widetilde{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 分别由 $\widetilde{A}X=AX$ 与 $\underset{\sim}{B}X=XB$ 确定. 易知 $\widetilde{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$ 是交换算子. 如果 $e(x,\mu)=\sum_{i,j}e_{ij}X^i\mu^j(e_{ij}\in F)$ 是 x,μ 的二元多项式，那么任取 $Y\in F^{n\times m}$，都有

$$(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})Y=\sum_{i,j}e_{ij}A^iYB^j.$$

以上是一些记号和预备知识，下面介绍(1)的一般解法.

定理1 如果(2)式严格既约，又 $f(A)=O,g(B)=O$，则 $\widetilde{A}-\underset{\sim}{B}$ 可逆，且

$$(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^kf_k(\widetilde{A})e_{k+1}(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})g_k(\underset{\sim}{B}). \qquad (11)$$

证明 分别以 $\widetilde{A},\underset{\sim}{B}$ 代入(7)和(8)式中的 x 和 μ，得

$$(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})h(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})=\widetilde{I}+(-1)^r\frac{\xi_r}{a_0}(f_{r-1}(\widetilde{A})g(\underset{\sim}{B})-f(\widetilde{A})g_{r-1}(\underset{\sim}{B})), \qquad (12)$$

$$h(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^kf_k(\widetilde{A})e_{k+1}(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})g_k(\underset{\sim}{B}). \qquad (13)$$

由假设可知 $f(\widetilde{A})=g(\underset{\sim}{B})=O$，(12)式化为

$$(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})h(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})=\widetilde{I}.$$

即 $\widetilde{A}-\underset{\sim}{B}$可逆，又$(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}=h(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})$. 以(13)式代入上式，最后即得(11)式. □

下面考虑矩阵方程(1)，其中 $A\in F^{n\times n}$, $B\in F^{m\times m}$, $C\in F^{n\times m}$为已知，$X\in F^{n\times m}$为未知.

令 A,B 的特征多项式分别为 $F(\lambda)$, $G(\lambda)$. (1)式存在唯一解的充要条件是 A 与 B 在复数域上无公共特征根(见[81, P.225])，即分式$\frac{G(\lambda)}{F(\lambda)}$为既约.

利用算子 $\widetilde{A}$ 与 $\underset{\sim}{B}$，(1)式可写为等价形式

$$(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})X=C. \tag{14}$$

对 A 与 B 使用 Cayley—Hamilton 定理，可知 $F(A)=O$, $G(B)=O$，如果$\frac{G(\lambda)}{F(\lambda)}$为既约的，则在定理1中分别取 $f(\lambda)$, $g(\lambda)$为 $F(\lambda)$, $G(\lambda)$，根据(11)式可求出$(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}$. 再由(14)式即可算出(1)式的唯一解 $X=(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}C$.

定理2 如果(2)式严格既约，又

$$f(A)C=Cg(B)=O, \tag{15}$$

则矩阵方程(1)具有解

$$X=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k f_k(A)C_{k+1}g_k(B),$$

其中

$$C_{k+1}=e_{k+1}(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})C.$$

证明 令 $X=h(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})C$，由(12)式得出

$$\begin{aligned}(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})X&=\{\widetilde{I}+(-1)^r\frac{\xi_r}{a_0}(f_{r-1}(\widetilde{A})g(\underset{\sim}{B})-f(\widetilde{A})g_{r-1}(\underset{\sim}{B}))\}C\\&=C+(-1)^r\frac{\xi_r}{a_0}(f_{r-1}(A)Cg(B)-f(A)Cg_{r-1}(B)),\end{aligned}$$

这里 $\widetilde{I}$为恒等变换. 按假定(15)，上式为(14)式. 于是，X 为(1)的解，又由(13)式可得

$$X=\{\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k f_k(\bar{A})e_{k+1}(\bar{A},\underset{\sim}{B})g_k(\underset{\sim}{B})\}C$$

$$=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k f_k(A)C_{k+1}g_k(B).$$

例1 求矩阵方程(1)的解，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

解 $f(x)$与$g(x)$分别为A与B的特征多项式. 此时

$$\frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}=\frac{\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda^3+2\lambda}=1+\cfrac{1}{e_1(\lambda)+\cfrac{1}{e_2(\lambda)+\cfrac{1}{e_3(\lambda)}}},$$

这里，$e_1(\lambda)=e_2(\lambda)=e_3(\lambda)=\lambda$. 利用(3)式得，$f_0(\lambda)=g_0(\lambda)=1$，又 $f_1(\lambda)=\lambda, f_2(\lambda)=\lambda^2+1, g_1(\lambda)=\lambda+1, g_2(\lambda)=\lambda^2+\lambda+1$.

由 $e_1(\lambda,\mu)=e_2(\lambda,\mu)=e_3(\lambda,\mu)=1$，得 $C_1=C_2=C_3=C$. 因此，

$$X=C-AC(B+I)+(A^2+I)C(B^2+B+I)$$

$$=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ -3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

下面介绍均匀分式.

以下设 $F[\lambda]$内 $f(x)$与 $g(\lambda)$具有

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{s}a_k\lambda^{s-k}, g(\lambda)=\sum_{k=0}^{s}b_k\lambda^{s-k}, \tag{16}$$

其中 $s\geqslant 1$，所有 $a_k, b_k\in F$，又 $a_0b_0\neq 0$. 令

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2k-1} \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{2k-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2k-1} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{2k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & b_k \end{vmatrix} \quad (\Delta_0=1), \tag{17}$$

$$P_k(\lambda)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2k} & 0 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{2k} & \lambda^k \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2k-1} & 0 \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{2k-1} & \lambda^{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & b_k & 1 \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$$Q_k(\lambda)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2k} & \lambda^k \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{2k} & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2k-1} & \lambda^{k-1} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{2k-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & b_k & 0 \end{vmatrix} \tag{19}$$

其中 $a_j=b_j=0(j>s)$. 易知 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互素的充要条件是 $\Delta_s\neq 0$.

引理2 设 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 具有形式(16),令

$$P(\lambda)=\sum_{k=0}^{l} p_k\lambda^{l-k}, Q(\lambda)=\sum_{k=0}^{l} q_k\lambda^{l-k} \tag{20}$$

$(0\leqslant l<s, p_k, q_k\in F)$. 如果 $\Delta_{l+1}\neq 0$, 又

$$\delta\Delta_{l+1}\lambda^{s-l-1}=L(f(\lambda)Q(\lambda)+g(\lambda)P(\lambda))\ (\delta\in F), \tag{21}$$

则

$$P(\lambda)=\delta P_l(\lambda),Q(\lambda)=\delta Q_l(\lambda).$$

证明 计算 $f(\lambda)Q(\lambda)+g(\lambda)P(\lambda)$的系数. 据(21)式得出下列一组关系式:

$$\begin{cases}a_0q_0+b_0p_0=0,\\ a_1q_0+b_1p_0+a_0q_1+b_0p_1=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{2l}q_0+b_{2l}p_0+a_{2l-1}q_1+b_{2l-1}p_1+\cdots+a_lq_l+b_lp_l=0,\\ a_{2l+1}q_0+b_{2l+1}p_0+a_{2l}q_1+\cdots+a_{l+1}q_l+b_{l+1}p_l=\delta\Delta_{l+1}.\end{cases} \tag{22}$$

上式为未知数 $q_0,p_0,q_1,p_1,\cdots,q_l,p_l$ 的线性方程组. 据假定,其系数行列式 $\Delta_{l+1}\neq0$. 令 Δ_{l+1}末行各元素的代数余子式为 $\upsilon_0,\mu_0,\upsilon_1,\mu_1,\cdots,\upsilon_l,\mu_l$. 将 $k=l$ 的(18)和(19)式分别按末列展开,可得

$$P_l(\lambda)=\sum_{j=0}^{l}\mu_j\lambda^{l-j},Q_l(\lambda)=\sum_{j=0}^{l}\upsilon_j\lambda^{l-j}.$$

对(22)式使用 Cramer 法则,可解出 $p_j=\delta\upsilon_j$,将其代入(20)式,最后导出

$$P(\lambda)=\sum_{j=0}^{l}\delta\mu_j\lambda^{l-j}=\delta P_l(\lambda),Q(\lambda)=\sum_{j=0}^{l}\delta\upsilon_j\lambda^{l-j}=\delta Q_l(\lambda).\ \square$$

假定 $\Delta_s\neq0$,令 $P(\lambda)=f(\lambda),Q(\lambda)=-g(\lambda)$. 此时

$$f(\lambda)Q(\lambda)+g(\lambda)P(\lambda)=0.$$

考虑引理2推广到 $l=s$ 的情形. 通过齐次线性方程组(22),类似可得

$$P_s(\lambda)=\Delta_sf(\lambda),Q_s(\lambda)=-\Delta_sg(\lambda). \tag{23}$$

如果(2)式严格既约,又 $g_0(\lambda)$为非零常数,又 $\deg e_k(\lambda)=1(k=1,2,\cdots,r)$,则称(2)式为均匀. 此时 $f(\lambda)$与 $g(\lambda)$具有 $s=r$ 的形式(16),又 Δs 与所有 $\varepsilon_k=e_k(\lambda,\mu)\in F(k=1,2\cdots,r)$都不为0. 由定理2易得

推论1 如果(2)均匀,又

$$f(A)C=Cg(B)=O,$$

则矩阵方程(1)具有解

$$X=\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k\varepsilon_{k+1}f_k(A)Cg_k(B).$$

定理3 如果 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 具有形式(16),则(2)式为均匀的充要条件是所有 $\Delta_k\neq 0(k=1,2,\cdots,s)$. 此时 $r=s$,且存在 $\rho_k\in F$,使得

$$f_k(\lambda)=\rho_k P_k(\lambda),g_k(\lambda)=-\rho_k Q_k(\lambda), \tag{24}$$

$(k=0,1,\cdots,s)$. 又

$$\xi_k\xi_{k+1}=(-1)^k a_0^2\frac{\Delta_k}{\Delta_{k+1}}\quad(k=0,1,\cdots,s-1), \tag{25}$$

这里 ξ_k 为 $f_k(\lambda)$的首项系数.

证明 据(16)式得 $g_0(\lambda)=\frac{b_0}{a_0}\neq 0$. 令

$$D_k(\lambda)=f(\lambda)g_k(\lambda)-g(\lambda)f_k(\lambda).$$

由(6)及(10)式可知

$$D_r(\lambda)=0,D_{r-1}(\lambda)=(-1)^r\frac{a_0}{\xi_r}.$$

从(3)式易算出

$$D_{k-1}(\lambda)=-e_{k+1}(\lambda)D_k(\lambda)+D_{k+1}(\lambda). \tag{26}$$

令 $n_k=\deg f_k(\lambda)$. 利用(5)式而知 $\deg g_k(\lambda)=n_k$. 由(6)式得到 $n_r=s$. 所以通过(4)式从(26)式导得

$$LD_k(\lambda)=(-1)^{k+1}\frac{a_0}{\xi_{k+1}}\lambda^{s-n_{k+1}}(k=0,1,\cdots,r-1). \tag{27}$$

假定所有 $\Delta_k\neq 0(k=1,2,\cdots,s)$. 从 $\Delta_s\neq 0$即知(2)式是严格既约. 令(20)式中 $l=n_k,P(\lambda)=-f_k(\lambda),Q(\lambda)=g_k(\lambda)$. 注意 $\Delta_{l+1}\neq 0$,由上式据引理2可有

$$\deg(f(\lambda)Q(\lambda)+g(\lambda)P(\lambda))=s-n_{k+1}\geqslant s-l-1=s-n_k-1.$$

于是，

$$\deg e_{k+1}(\lambda)=n_{k+1}-n_k=1 \quad (k=0,1,\cdots,r-1),$$

(2)式为均匀，且 $r=s$.

反之，设(2)式为均匀，此时 $\Delta_s\neq 0$. 由(4)式知 $n_k=k, r=s$. 以下我们假定 $\Delta_{k+1}\neq 0(0\leqslant k<s)$，并由此证明 $\Delta_k\neq 0$. 为此我们规定

$$\rho_k=(-1)^k\frac{a_0}{\xi_{k+1}\Delta_{k+1}}\in F.$$

此时(27)式为 $LD_k(\lambda)=-\rho_k\Delta_{k+1}\lambda^{s-k-1}$. 在引理2中取 $l=k, P(\lambda)=-f_k(\lambda), Q(\lambda)=g_k(\lambda)$，即得

$$f_k(\lambda)=-P(\lambda)=\rho_kP_k(\lambda), g_k(\lambda)=Q(\lambda)=-\rho_kQ_k(\lambda).$$

于是，$\deg P_k(\lambda)=k$，即 $\Delta_k\neq 0$. 这就用数学归纳法证明了所有 $\Delta_k\neq 0(k=s,s-1,\cdots,1)$，又(24)式对所有 $k<s$ 为真. 令 $\rho_s=\frac{\xi_s}{a_0\Delta_s}$. 由(16)及(23)式可知

$$f_s(\lambda)=\rho_sP_s(\lambda), g_s(\lambda)=-\rho_sQ_s(\lambda).$$

从而(24)式对所有 $k\leqslant s$ 成立. 易知

$$\xi_k\lambda^k=Lf_k(\lambda)=\rho_kLP_k(\lambda)=(-1)^k\frac{a_0^2\Delta_k}{\xi_{k+1}\Delta_{k+1}}\lambda^k(k=0,1,\cdots,s-1).$$

上式简化变形即得(25)式. □

现在我们介绍 ляпунов 函数.

设(2)式严格既约. 如果 $g_0(\lambda)=1$，又

$$-\bar{e}_1(-\lambda)=1+e_1(\lambda), -\bar{e}_k(-\lambda)=e_k(\lambda)(k=2,\cdots,r), \quad (28)$$

则称(2)式为 H 分式.

定理4 如果(2)式严格既约，$Lf(\lambda)=a_0\lambda^s(a_0\in F)$，则(2)式为 H 分式的充要条件是

$$\bar{a}_0g(\lambda)=(-\lambda)^sa_0\bar{f}(-\lambda). \quad (29)$$

此时，

$$g_k(\lambda)=(-1)^k\bar{f}_k(-\lambda)(k=0,1,\cdots,r). \quad (30)$$

证明 假定(2)式为 H 分式，此时 $g_0(\lambda)=1$. 由(2)式得

$$\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}=1-\cfrac{1}{1+e_1(\lambda)+\cfrac{1}{e_2(\lambda)+\cfrac{1}{e_3(\lambda)+\cdots+\cfrac{1}{e_r(\lambda)}}}}. \quad (31)$$

利用(2)与(26)式，由上式可知

$$\frac{\bar{g}(-\lambda)}{f(-\lambda)}=1+\cfrac{1}{\bar{e}_1(-\lambda)+\cfrac{1}{\bar{e}_2(-\lambda)+\cfrac{1}{\bar{e}_3(-\lambda)+\cdots+\cfrac{1}{\bar{e}_r(-\lambda)}}}}$$

$$=\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}. \quad (32)$$

于是，存在 $\delta\in F$，使得 $g(\lambda)=\delta f(-\lambda)$. 因 $Lf(\lambda)=Lg(\lambda)$，故

$$\delta=(-1)^s\frac{a_0}{\bar{a}_0}.$$

从而(29)式成立.

反之，假定(29)式成立. 此时 $a_0\bar{g}(-\lambda)=(-1)^s\bar{a}_0f(\lambda)$. 一方面可得(32)式，另一方面，从 $Lf(\lambda)=Lg(\lambda)$，$g_0(\lambda)=1$，而有(31)式. (31)与(32)式相比较，导出(28)式，即(2)式为 H 分式.

在此情形下，今将已证的结论用于 H 分式

$$\frac{g_k(\lambda)}{f_k(\lambda)}=1+\cfrac{1}{e_1(\lambda)+\cfrac{1}{e_2(\lambda)+\cdots+\cfrac{1}{e_k(\lambda)}}},$$

于是，存在 $\delta_k\in F$，使得 $g_k(\lambda)=\delta_k\bar{f}_k(-\lambda)$. 据(4)、(5)及(28)式得

$$\begin{aligned}L\bar{f}_k(-\lambda)&=L(\bar{e}_1(-\lambda)\bar{e}_2(-\lambda)\cdots\bar{e}_k(-\lambda))\\&=(-1)^kL(e_1(\lambda)e_2(\lambda)\cdots e_k(\lambda))\\&=(-1)^kLg_k(\lambda).\end{aligned}$$

所以，$\delta_k=(-1)^k$. 从而(30)式成立. □

如果 H 分式(2)为均匀，则称(2)式为 H 均匀. 记实数域为

R. 由(28)式可知,(2)式为 H 均匀的充要条件为

$$\frac{g(\lambda)}{f(\lambda)}=1+\cfrac{1}{\varepsilon_1\lambda-\frac{1}{2}+\tau_1 i+\cfrac{1}{\varepsilon_2\lambda+\tau_2 i+\cfrac{1}{\varepsilon_3\lambda+\tau_3 i+\cdots+\cfrac{1}{\varepsilon_r\lambda+\tau_r i}}}}, \quad (33)$$

这里的所有 $\varepsilon_k,\tau_k\in R(1\leqslant k\leqslant r)$,$\varepsilon_1\varepsilon_3\cdots\varepsilon_r\neq 0$.

定理5 如果(2)式为 H 均匀,则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$ 中取正值的个数等于 $f(\lambda)$位于右复半平面的复根的个数.

证明 据定理3,$f(\lambda)$与 $g(\lambda)$可写为(16)式,其中 $s=r$,又所有 $\Delta_k\neq 0(k=1,2,\cdots,s)$. 令

$$f(i\lambda)=\sum_{k=0}^{s}(\beta_k+i\alpha_k)\lambda^{s-k}(\alpha_k,\beta_k\in R).$$

此时,$a_k i^{s-k}=\beta_k+i\alpha_k$. 规定 $\alpha_j=\beta_j=0(j>s)$. 令

$$\nabla_{2k}=\begin{vmatrix}\alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{2k-1}\\ \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{2k-1}\\ 0 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{2k-2}\\ 0 & \beta_0 & \cdots & \beta_{2k-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_k\\ 0 & 0 & \cdots & \beta_k\end{vmatrix}\in R \quad (k=1,\cdots,s,\nabla_0=1).$$

利用行列式的变换,可推出

$$\Delta_k=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\left(\frac{2a_0}{\bar{a}_0}\right)^k\nabla_{2k}.$$

从(25)式得到

$$\varepsilon_{k+1}=-\frac{|a_0|^2\nabla_{2k}}{2\xi_k^2\nabla_{2k+2}} \quad (k=0,1,\cdots,r-1),$$

其中 $\xi_k\in R$,从而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_s$ 中取正值的个数为变号数 $V(\nabla_0,\nabla_2,\cdots,\nabla_{2s})$,即 $f(\lambda)$位于右复半平面的根的个数(见[81],P.

612). □

记复数域为 V，令 $B\in V^{m\times m}, Z\in V^{m\times 1}$. 考虑常线性系统

$$\frac{dz}{dt}=BZ. \tag{34}$$

令(34)式的所有特征根为 $\lambda_j(j=1,\cdots,m)$. 如果所有 $\lambda_j+\lambda_k\neq 0$ $(1\leqslant j\leqslant k\leqslant m)$，则任给 H 型 Z^*CZ，都存在唯一的 H 型 Z^*XZ，使沿(34)式有

$$\frac{d}{dt}(Z^*XZ)=-Z^*CZ, \tag{35}$$

这里的 C 与 X 都为 Hermite 矩阵(见[81]，P. 549). (35)式等价于矩阵方程

$$AX-XB=C \quad (A=-B^*). \tag{36}$$

定理6 如果 $g(\lambda)$ 为(34)式的特征多项式，

$$f(\lambda)=(-1)^m\bar{g}(-\lambda),$$

(2)式为均匀分式，则

(i) $r=m$，(33)式成立，其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m$ 中取正数的个数等于(34)式位于左复半平面内的特征根的个数；

(ii) (35)式存在唯一的解

$$Z^*XZ=\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_{k+1}Z_k^*CZ_k, \tag{37}$$

这里的 $Z_k=g_k(B)Z$.

证明 据假定此时

$$Lf(\lambda)=Lg(\lambda)=\lambda^m, g(\lambda)=(-1)^m\bar{f}(-\lambda).$$

据定理4可知，(2)式为 H 分式. 从而 $r=m$，(33)式成立. $f(\lambda)$ 的所有根为 $-\bar{\lambda}_j(1\leqslant j\leqslant m)$. $f(\lambda)$ 位于右复半平面内根的个数必等于 $g(\lambda)$ 位于左复半平面内根的个数. 利用定理5即知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 中取正数的个数等于(34)位于左复半平面内特征根的个数.

$f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 分别为 A,B 的特征多项式. 因 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 互素，故(36)式的解存在且唯一. 由 Cayley—Hamilton 定理，有

$g(B)=f(A)=O$. 由(30)式可知，

$$f_k(A)=(\bar{f}_k(A^*))^*=(-1)^k(g_k(B))^*.$$

利用推论1，得(36)式的解

$$X=\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_{k+1}(g_k(B))^*Cg_k(B),$$

从而(35)式存在唯一的解

$$Z^*XZ=\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_{k+1}Z^*(g_k(B))^*Cg_k(B)Z=\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_{k+1}Z_k^*CZ_k. \square$$

设(34)式为渐近稳定. 如果 Z^*CZ 为正定，则由上述定理可知，所有 ε_{k+1} 为正数，又(35)式的解 Z^*XZ 可按(37)式分解为所有非负 H 型 $\varepsilon_{k+1}Z_k^*CZ_k$ 之和. 因 $\varepsilon_1Z_0^*CZ_0=\varepsilon_1Z^*C_2$ 为正定，故(37)同时表明 ляпунов 函数 Z^*XZ 为正定.

2 矩阵方程(1)的最小多项式解法

本段利用矩阵 A,B 的最小多项式求解此方程，使得它的解比目前已见的结果较简洁. 本段沿用上一段的记号. 易知

引理3 $e(\lambda,\mu)=\sum_{i,j}e_{ij}\lambda^i\mu^j(e_{ij}\in F)$ 为 F 上的二元多项式，对任意的 $X\in F^{n\times m}$，有

$$e(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})=\sum_{i,j}e_{ij}A^iXB^j. \tag{38}$$

特别地，当 $f(\mu)$ 为一元多项式时有

$$f(\underset{\sim}{B})X=Xf(B). \tag{38}$$

记 $m_\sigma(\lambda)$ 为 $F^{n\times m}$ 到 $F^{n\times m}$ 的线性算子 σ 的最小多项式. 下面的两个引理是显然的.

引理4 $m_{\widetilde{A}}(\lambda)=m_A(\lambda)m_{\underset{\sim}{B}}(\lambda)=m_B(\lambda)$.

易知矩阵方程(1)与矩阵方程

$$(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})X=C \tag{39}$$

等价.

$g(\lambda)$为 F 上的多项式, $(m_{\underset{\sim}{B}}(\lambda), g(\lambda))=1 \Leftrightarrow$ 存在(唯一) F 上的多项式 $\mu(\lambda), \upsilon(\lambda)$ 使得

$$g(\lambda)\mu(\lambda)+m_{\underset{\sim}{B}}(\lambda)\upsilon(\lambda)=1. \tag{40}$$

引理5 $g(\underset{\sim}{B})$可逆$\Leftrightarrow (m_{\underset{\sim}{B}}(\lambda), g(\lambda))=1$且

$$[g(\underset{\sim}{B})]^{-1}=\mu(\underset{\sim}{B}), \tag{41}$$

其中 $\mu(\lambda)$满足(40)式.

对于 $m_A(\lambda)$必有 F 上的二元多项式 $q(\lambda,\mu)$使

$$m_A(\lambda)=(\lambda-\mu)q(\lambda,\mu)+m_A(\mu). \tag{42}$$

定理7 $\widetilde{A}-\underset{\sim}{B}$可逆$\Leftrightarrow (m_A(\lambda), m_B(\lambda))=1$, 且

$$(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}=-q(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})\mu(\underset{\sim}{B}), \tag{43}$$

$\mu(\lambda)$满足

$$m_A(\lambda)\mu(\lambda)+m_B(\lambda)\upsilon(\lambda)=1.$$

证明 (充分性) 将 $\widetilde{A}, \underset{\sim}{B}$分别代入(42)式中的 λ 和 μ, 有

$$m_A(\widetilde{A})=(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})q(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})+m_A(\underset{\sim}{B}). \tag{44}$$

由引理4知, $m_A(\widetilde{A})=m_{\widetilde{A}}(\widetilde{A})=0$, $m_A(\underset{\sim}{B})=m_{\widetilde{A}}(\underset{\sim}{B})$. 在引理5中取 $g(\lambda)=m_A(\lambda)$知 $m_A(\underset{\sim}{B})$可逆, 且

$$[m_A(\underset{\sim}{B})]^{-1}=\mu(\underset{\sim}{B}),$$

于是, 由(44)式知$(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})[-q(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})\mu(\underset{\sim}{B})]=\widetilde{I}$, $\widetilde{I}$为恒等算子.

(必要性) $(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})$可逆, 则矩阵方程(1)存在唯一解, 由[81]225页知 A 与 B 无相同特征根, 因此$(m_A(\lambda), m_B(\lambda))=1$. □

我们还可将$(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}$表示得更具体.

设 $m_A(\lambda)=\lambda^r+a_{r-1}\lambda^{r-1}+\cdots+a_0$, 由(42)式

$$q(\lambda,\mu)=\frac{1}{\lambda-\mu}(m_A(\lambda)-m_A(\mu))=\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{s=0}^{k}a_{r-s}\lambda^{r-1-k}\mu^{k-s}, a_r=1. \tag{45}$$

故

$$q(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})=\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{s=0}^{k}a_{r-s}\widetilde{A}^{r-1-k}\underset{\sim}{B}^{k-s},$$

从而，

$$(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}=-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{s=0}^{k}a_{r-s}\widetilde{A}^{r-1-k}\underset{\sim}{B}^{k-s}\mu(\underset{\sim}{B}). \tag{45}$$

由引理3知方程(1)或(39)的解为

$$X=(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})^{-1}C=-\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{s=0}^{k}a_{r-s}A^{r-1-k}CB^{k-s}\mu(B), \tag{46}$$

这个解的代数结构完全由 A,B,C 的多项式表示，因此较为简洁，应用也较方便.

下面重解例1：

$m_A(\lambda)=\lambda^3+2\lambda, m_B(\lambda)=\lambda^3+\lambda^2+2\lambda+1.$

由于

$$m_A(\lambda)(-\lambda^2-\lambda-1)+m_B(\lambda)(\lambda^2+1)=1,$$

有

$$\mu(\lambda)=-(\lambda^2+\lambda+1),$$

从而

$$\mu(B)=-(B^2+B+1)=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

而 $a_1=2,a_2=0,a_3=1$，代入(46)式有

$$X=-(A^2C+ACB+CB^2+2C)\mu(B)=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ -3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

定理8 $(f(\lambda),g(\lambda))=1$且 $f(A)C=O, Cg(B)=O$，则矩阵方程(1)有解

$$X=q_1(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})v(A)C.$$

证明 由$(f(\lambda),g(\lambda))=1$知，有多项式 $\mu(\lambda)$和 $v(\lambda)$使得

$$\mu(\lambda)f(\lambda)+v(\lambda)g(\lambda)=1.$$

将

$$g(\lambda)=(\lambda-u)q_1(\lambda,\mu)+g(\mu)$$

代入上式有

$$\mu(\lambda)f(\lambda)+(\lambda-\mu)q_1(\lambda,\mu)q_1(\lambda,\mu)v(\lambda)+v(\lambda)g(\mu)=1.$$

将 $\widetilde{A}$, $\underset{\sim}{B}$分别代入上式中的 λ 和 μ 有

$$\mu(\widetilde{A})f(\widetilde{A})+(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})q_1(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})v(\widetilde{A})+v(\widetilde{A})g(\underset{\sim}{B})=\widetilde{I}.$$

上式两端作用于 $C\in F^{n\times m}$上并由引理3有

$$\mu(A)f(A)C+(\widetilde{A}-\underset{\sim}{B})q_1(\widetilde{A},\underset{\sim}{B})v(A)C+v(A)Cg(B)=C. \square$$

注 设 $f(\lambda)$, $g(\lambda)$分别为 A, B 的特征多项式，则 $f(A)=O$, $g(B)=O$. 故由定理8，将定理7中的 A, B 的最小多项式换成它们的特征多项式时定理7同样成立.

3 矩阵方程 $AX+XB=C$ 的反演解法

考虑矩阵方程

$$AX+XB=C, \tag{1'}$$

其中 A, B, C 分别为 m 阶，n 阶实方阵及 $m\times n$ 实阵，X 为 $m\times n$ 未知实阵.

由第一章 § 6知，(1′)等价于

$$((I_n\otimes A)+(B'\otimes I_m))\sigma(X)=\sigma(C), \tag{47}$$

$\sigma(C)$是矩阵 C 的拉直.

设 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，β 是 B'的属于特征值 μ 的特征向量，则

$$A\alpha\beta'+\alpha\beta'B=(\lambda+\mu)\alpha\beta'.$$

所以 $\lambda+\mu$ 是(47)的一个特征值. (47)可解当且仅当对所有的 i, j,

$$\lambda_i+\mu_j\neq 0. \tag{48}$$

当 A, B 可以对角化时，即有可逆阵 U 和 V 使

$U^{-1}AU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$ 及 $V^{-1}BV=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)$ 时，(1′)的解容易求得 $X=U\widetilde{X}V^{-1}$，其中

$$\widetilde{X}=(\widetilde{x}_{ij}),\widetilde{x}_{ij}=\frac{\widetilde{c}_{ij}}{\lambda_i+\mu_j},\widetilde{C}=U^{-1}CV,\widetilde{C}=(\widetilde{c}_{ij}).$$

事实上，

$$((V^{-1})'\otimes U)((I_n\otimes A)+(B'\otimes I_m))(V'\otimes U^{-1})$$
$$=\mathrm{diag}(\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2,\lambda_3+\mu_1,\cdots,\lambda_1+\mu_2,\cdots,\lambda_m+\mu_n).$$

当 A,B 不能对角化时，令

$C_0=O$,

$C_1=C=AX+XB$,

$C_2=AC_1-C_1B+AC_0B=A^2X-XB^2$

$C_3=AC_2-C_2B+AC_1B=A^3X+XB^3$,

…… …… …… ……

$C_k=AC_{k-1}-C_{k-1}B+AC_{k-2}B=A^kX-(-1)^kXB^k$,

…… …… …… ……

令 A 与 B 的特征方程分别为

$$|\lambda I-A|=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_m)=0,$$
$$|\mu I-B|=\mu^n+b_1\mu^{n-1}+\cdots+b_n=(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)\cdots(\mu-\mu_n)=0.$$

于是，利用 Cayley－Hamilton 定理，可得

$$C_n-b_1C_{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}b_{n-1}C_1$$
$$=A^nX-b_1A^{n-1}X+\cdots+(-1)^{n-1}b_{n-1}AX+(-1)^nb_nX$$

及

$$C_m+a_1C_{m-1}+\cdots+a_{m-1}C_1$$
$$=-a_mX-(-1)^m(XB^m-a_1XB^{m-1}+\cdots+(-1)^{m-1}a_{m-1}XB).$$

故

$$X=G^{-1}(C_n-b_1C_{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}b_{n-1}C_1)$$
$$=(-1)^{m-1}(C_m+a_1C_{m-1}+\cdots+a_{m-1}C_1)H^{-1}$$

其中，

$$G=A^n-b_1A^{n-1}+\cdots+(-1)^nb_nI$$
$$=(A+\mu_1I)(A+\mu_2I)\cdots(A+\mu_nI),$$
$$H=B^m-a_1B^{m-1}+\cdots+(-1)^ma_mI$$
$$=(B+\lambda_1I)(B+\lambda_2I)\cdots(B+\lambda_mI).$$

由于矩阵乘积的行列式就是其行列式的积，所以，对任意的 i，如果 $-\mu_i$ 是 A 的一个特征值，则显有 G 不可逆，同样地，对任意的 i，如果 $-\lambda_i$ 不是 B 的特征值，则 H 不可逆．也就是说，如果(48)不成立，则 G 和 H 是奇异的．

利用 Bocher 恒等式(见〔84〕)，可确定出系数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 及 $b_1,b_2,\cdots,b_n$：

$$a_1=-\mathrm{tr}(A)$$
$$a_2=-\frac{1}{2}(a_1\mathrm{tr}A+trA^2),$$
$$a_3=-\frac{1}{3}(a_2\mathrm{tr}A+a_1\mathrm{tr}A^2+\mathrm{tr}A^3),$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_m=-\frac{1}{m}(a_{m-1}\mathrm{tr}A+a_{m-2}\mathrm{tr}A^2+\cdots+\mathrm{tr}A^m)=(-1)^m|A|.$$

以上我们介绍了矩阵方程(1)的常见的3种解法，当然还有其它一些解法，由于篇幅所限，我们不能一一介绍．有兴趣的读者可参见文献〔86〕～〔92〕．

§9　矩阵方程 $TA-BT=C$ 的解可逆的若干条件

设 A,B,C 为 n 阶复方阵，T 为未知复方阵，本节我们研究矩阵方程

$$TA-BT=C \tag{1}$$

在有解的条件下，解可逆的若干条件．这些结果在控制论中是很有用的．

以下讨论均在复 n 维列向量空间上进行.

我们在第一章§7中曾介绍过矩阵的可测、可控. 对于 n 阶方阵 M 和 $n\times m$ 矩阵 K,(M,K) 可控当且仅当

$$\operatorname{rank}(K,MK,\cdots,M^{n-1}K)=n;$$

如果 L 是 $m\times n$ 阵,则 (M,L) 是可测的 $\Leftrightarrow(M^*,L^*)$ 可控. 当 (M,K) 不可控时,一定有非零向量 $p\in N(U^*)$,

$$U=(K,MK,\cdots,M^{n-1}K),$$

且 $p^*M^rK=0,r\geqslant 0$. 当 K 是一向量 k 时,(M,K) 不可控,如果 k 属于 M—不变真子空间(若此子空间的维数 $r<n$),则至多有 r 个向量 $k,Mk,M^2k,\cdots$ 线性无关.

众所周知,任意一个秩为 r 的 n 阶方阵 C 总可分解为 $C=XY^*$,其中 X 和 Y 都是秩为 r 的 $n\times r$ 矩阵. 显然,(B,C) 可控当且仅当 (B,X) 可控,(A,C) 可测也即 (A^*,C^*) 可控当且仅当 (A^*,Y) 可控. 特别地,如果 C 的秩为1,则 (B,C) 与 (A^*,C^*) 均可控等价于对向量 x 和 y 有 (B,x) 与 (A^*,y) 均可控.

定理1 设 A,B 是已知的 n 阶方阵,x 和 y 是使 (B,x) 与 (A^*,y) 均可控的向量. 如果矩阵方程(1)相容,其中 $C=xy^*$,则(1)的每个解均可逆.

证明 设 $q\in N(T)$,则 $TAq=xy^*q$. 设对某 $q\in N(T)$,$y^*q\neq 0$,显然,$x\in R(T)$,从而由

$$BT=TA-xy^*$$

即得,$R(T)$ 是 B—不变真子空间.

从而,(B,x) 不可控,矛盾. 故对 $\forall\ q\in N(T)$ 必有 $y^*q=0$. 从而,$TAq=0$. 于是,$q,Aq,A^2q,\cdots$ 皆属于 $N(T)$. 故

$$y^*q=y^*Aq=y^*A^2q=\cdots=y^*A^{n-1}q=0.$$

因 (A^*,y) 可控,故必有 $q=0$. 此示,对 $\forall\ q\in N(T)$,必有 $q=0$. 从而 T 可逆. □

定理2 设 T 是矩阵方程(1)的一个解. 考虑下列条件:

(a) $R(C) \subseteq R(T)$;

(b) (B, C)可控;

(c) $N(T) \subseteq N(C)$;

(d) (A^*, C^*)可控;

(e) $N(T)$是 $A-$不变的;

(f) $N(T^*)$是 B^*-不变的;

(g) $\mathrm{rank} C=1$.

则

1) 若(a)和(b)成立,则 T^{-1}存在.

2) 若(c)和(d)成立,则 T^{-1}存在.

3) 条件(a)和(f)是等价的.

4) 条件(c)和(e)是等价的.

5) 若(g)成立,则或(a)成立,或(c)成立.

6) 若(b),(d),(g)成立,则 T^{-1}存在.

证明 1) 若(a)成立且 $p \in N(T^*)$,则 $B^* p \in N(T^*)$. 事实上,由 T 是矩阵方程(1)的解知,

$$C^* = A^* T^* - T^* B^*.$$

从而

$$T^* B^* p = A^* T^* p - C^* p. \tag{2}$$

由 $p \in N(T^*)$知,$T^* p=0$. 由(a)知 $N(C^*) \supseteq N(T^*)$. 从而,$p \in N(C^*)$. 即 $C^* p=0$. 于是由(2)立得 $B^* p \in N(T^*)$. 从而再由(a)得,对 $r=0,1,\cdots,n-1$,有 $p^* B^r C=0$. 由于(b)成立,故必有 $p=0$. 因 p 是 $N(T^*)$中的任意元,故 T 可逆.

2) 设(c)成立且 $q \in N(T)$,则由 T 是矩阵方程(1)的解得 $Aq \in N(T)$. 由此及(c),我们有 $CA^r q=0, r=0,1,\cdots,n-1$. 又(d)成立,故必有 $q=0$.

3) 由(a)及1)知,$R(BT) \subseteq R(T)$即(f)成立,反之,如果(f)成立,则由 T 是(1)的解可得,$p \in N(T^*)$意味着 $p \in N(C^*)$. 所以

$N(T^*) \subseteq N(C^*)$，从而(a)成立.

4) 如果(c)成立，则由 T 是(1)的解，得 $q \in N(T)$ 意味着 $Aq \in N(T)$，即(e)成立.

反之，若(e)成立，则由 T 是(1)的解可推知，如果 $q \in N(T)$，则 $q \in N(C)$，即(c)成立.

5) 设 $\mathrm{rank}C = 1$ 且(a)不成立，则不存在 $q \in N(T)$ 使 $TAq = Cq \neq 0$. 故由 $q \in N(T)$ 必得 $q \in N(C)$，即(c)成立.

6) 设(b)，(d)和(g)成立. 若(a)成立，则由1)知，T^{-1} 存在. 若(a)不成立，则由5)知，(c)必成立. 从而由2)知，T^{-1} 存在. □

§10 可控、可测与矩阵方程 $AX - XB = C$ 的解

本节我们继续研究矩阵方程

$$AX - XB = C. \tag{1}$$

我们证得当(1)有唯一解时，X 可表成如下形式

$$X = \sum_{j=1}^{v} \sum_{i=1}^{\mu} r_{ij} A^{i-1} C B^{j-1}. \tag{2}$$

探讨了(2)的一些性质.

本节假定 F 是一个域(实数域或复数域)，$A \in F^{m \times m}$，$B \in F^{n \times n}$，$C \in F^{m \times n}$，$\mathrm{Spec}S$ 表示 S 的谱，$\mathrm{Im}T$ 与 $\mathrm{Ker}T$ 表示矩阵 T 的象与核，$F^m = F^{m \times 1}$.

设 $A \in F^{m \times m}$，$B \in F^{n \times n}$，则称

$$\mathrm{Im}[C, AC, \cdots, A^{m-1}C] \subset F^m$$

是矩阵对(A, C)的可控子空间；

$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} C \\ CB \\ \vdots \\ CB^{n-1} \end{pmatrix} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}CB^{i-1} \subset F^n$$

是矩阵对(C,B)的不可测子空间.

对于 F 上的首1多项式

$$\delta(\lambda)=\lambda^t+\delta_1\lambda^{t-1}+\cdots+\delta_t,$$

我们定义 $t\times t$ 伴侣矩阵 K_δ 和上 Hankel 矩阵 H_δ 分别如下:

$$K_\delta=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ -\delta_t & \cdots & \cdots & \cdots & -\delta_1 \end{pmatrix};$$

$$H_\delta=\begin{pmatrix} \delta_{t-1} & \cdots & \cdots & \delta_1 & 1 \\ & & \cdot & 1 & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \delta_1 & 1 & \cdot & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

1 矩阵方程(1)唯一解 X 的表达式

设 $\operatorname{rank}C=q$,C 的满秩分解为

$$C=C_AC'_B$$

其中 $C_A\in F^{m\times q}$,$C'_B\in F^{q\times n}$.

定理1 设

$$AX-XB=C=C_AC'_B$$

有唯一解,$\alpha(\lambda)$和 $\beta(\lambda)$是互素的首1多项式,次数分别为 μ 和 ν,且满足

$$\alpha(A)C=O, \tag{3a}$$

$$C\beta(B)=O, \tag{3b}$$

则矩阵方程(1)的唯一解可表为

$$X=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{\mu}r_{ij}A^{i-1}CB^{j-1} \tag{2a}$$

$$=(C_A, AC_A, \cdots, A^{\mu-1}C_A)(\Gamma \otimes I_q)\begin{pmatrix} C'_B \\ C'_B B \\ \vdots \\ C'_B B^{\nu-1} \end{pmatrix}, \tag{2b}$$

其中，

$$\Gamma=\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{\mu1} & \cdots & r_{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{4}$$

是

$$K'_\alpha \Gamma - \Gamma K_\beta = (1,0,\cdots,0)'(1,0,\cdots,0) \tag{5}$$

的唯一解.

为证明此定理，我们需要下面的

引理1 设 $\alpha(\lambda)$和 $\beta(\lambda)$分别是次数 μ 和 ν 的首1多项式，且满足(3)，则(2)中的 X 是(1)的解，如果(4)满足(5).

证明 令 $M_\mu=(C_A, AC_A, \cdots, A^{\mu-1}C_A)$，

$$N_\nu=\begin{pmatrix} C'_B \\ C'_B B \\ \vdots \\ C'_B B^{\nu-1} \end{pmatrix},$$

则由(2b)及(4)知，(2)可改写为

$$X=M_\mu(\Gamma \otimes I_q)N_\nu. \tag{6}$$

因 C'_A, C'_B 满秩，故(3)等价于

$$\alpha(A)C_A=O, \tag{7a}$$

$$C'_B\beta(B)=O. \tag{7b}$$

注意到，

$$AM_\mu=M_\mu(K'_\alpha \otimes I_q), \tag{8a}$$

$$N_\nu B=(K_\beta \otimes I_q)N_\nu), \tag{8b}$$

并利用(6),(8a)及(8b),我们有下面的

$$\begin{aligned}AX-XB&=M_\mu(K'_\alpha\otimes I_q)(\Gamma\otimes I_q)N_\nu-M_\mu(\Gamma\otimes I_q)(K_\beta\otimes I_q)N_\nu\\&=M_\mu[(K'_\alpha\Gamma)\otimes I_q-(\Gamma K_\beta)\otimes I_q]N_\nu\\&=M_\mu[(K'_\alpha\Gamma-\Gamma K_\beta)\otimes I_q]N_\nu.\end{aligned}\tag{9}$$

又

$$C=C_AC'_B=M_\mu[([1,0,\cdots,0]'[1,0,\cdots,0])\otimes I_q]N_\nu.\tag{10}$$

我们可验证 $AX-XB=C$. □

引理2 矩阵方程(5)相容的充要条件是

$$(\alpha(\lambda),\beta(\lambda))=1.$$

证明 若$(\alpha(\lambda),\beta(\lambda))=1$,则 $\mathrm{Spec}K'\alpha\cap\mathrm{Spec}K_\beta$ 为空集.故由[81]知(5)相容且解 Γ 唯一.

设有复数 t 满足

$$\alpha(t)=\beta(t)=0,\tag{11}$$

并设

$$\nu'_t=(1,t,t^2,\cdots,t^{\mu-1}),$$

$$\omega_t=(1,t,t^2,\cdots,t^{\nu-1})',$$

则

$$\nu'_tK'_\alpha=t\nu'_t,$$

$$K_\beta\omega_t=t\omega_t,$$

且由(5)有

$$\nu'_t(K'_\alpha\Gamma-\Gamma K_\beta)\omega_t=\nu'_t(1,0,\cdots,0)'(1,0,\cdots,0)\omega_t,$$

或

$$t\nu'_t\Gamma\omega_t-t\nu'_t\Gamma\omega_t=1$$

相容.故由(11)知,(5)不相容. □

定理1的证明 当(1)有唯一解时,$\mathrm{Spec}A\cap\mathrm{Spec}B$ 为空集,故满足(3)的互素的首1多项式 $\alpha(\lambda)$ 以及 $\beta(\lambda)$ 必存在(如 $\alpha(\lambda)$ 和 $\beta(\lambda)$ 可分别取为 A 和 B 的最小多项式).由引理2,存在唯一的 Γ 满足(5),由(3)及引理1,(2)是(1)的解. □

定理1表明,(1)有唯一解时,解的计算可简化为(5)的解 Γ 的计算.

利用 C 的满秩分解 $C=C_A C'_B$，保证了

$$\operatorname{Im}(C_A, AC_A, \cdots, A^j C_A)=\operatorname{Im}(C, AC, \cdots, A^j C), j=0,1,\cdots,$$

及

$$\bigcap_{j=0}^{k}\operatorname{Ker}C'_B B^j=\bigcap_{j=0}^{k}\operatorname{Ker}CB^j, k=0,1,\cdots$$

为减小满足(3)的 α 与 β 的次数，我们需用下面的

引理3[94] 设 A_c 和 B'_c 分别表示 A 和在 B' 在 (A,C) 和 (B', C') 的可控子空间上的限制，$\alpha^*(\lambda)$ 和 $\beta^*(\lambda)$ 分别是 A_c 和 B'_c 的最小多项式，则满足

$$\alpha(A)C=O \text{ 与 } C\beta(B)=O$$

的次数最低的首1多项式 $\alpha(\lambda)$ 与 $\beta(\lambda)$ 分别为 $\alpha^*(\lambda)$ 和 $\beta^*(\lambda)$.

下面给出(5)的显式解，它在计算 $\operatorname{rank}X$ 时很有用。

引理4 当(5)相容时，它的唯一解为

(a) 当 $\nu\geqslant\mu$ 时，

$$\Gamma=-(H_\alpha, O_{\mu\times(\mu-\nu)})[\alpha(K_\beta)]^{-1}, \tag{12}$$

(b) 当 $\mu\geqslant\nu$ 时，

$$\Gamma=[\beta(K'_\alpha)]^{-1}\begin{pmatrix} H_\beta \\ O_{(\mu-\nu)\times\nu}\end{pmatrix}. \tag{13}$$

证明 矩阵方程(5)就是(1)，其中

$$A=K_\alpha', B=K_\beta,$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$=(1,0,\cdots,0)'(1,0,\cdots,0).$$

由(1)得

$$
\begin{aligned}
&C_0 = A^0X - XB^0 = O,\\
&C_1 = A^1X - XB^1 = C,\\
&C_2 = A^2X - XB^2 = AC + CB,\\
&C_3 = A^3X - XB^3 = A^2C + ACB + CB^2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&C_k = A^kX - XB^k = \sum_{p=1}^{k} A^{p-1}CB^{k-p}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

由(15)式可有

$$\alpha(A)X - X\alpha(B) = C_\mu + \alpha_1 C_{\mu-1} + \cdots + \alpha_{\mu-1}C_1 \stackrel{\triangle}{=\!=} C^\alpha, \tag{16a}$$

$$\beta(A)X - X\beta(B) = C_\nu + \beta_1 C_{\nu-1} + \cdots + \beta_{\nu-1}C_1 \stackrel{\triangle}{=\!=} C^\beta, \tag{16b}$$

这里,

$$\alpha(\lambda) = \lambda^\mu + \alpha_1\lambda^{\mu-1} + \cdots + \alpha_\mu,$$

$$\beta(\lambda) = \lambda^\nu + \beta_1\lambda^{\nu-1} + \cdots + \beta_\nu$$

分別是 A 和 B 的最小多项式. 令

$$(\alpha(\lambda), \beta(\lambda)) = 1,$$

则

$$X = -(C_\mu + \alpha_1 C_{\mu-1} + \cdots + \alpha_{\mu-1}C_1)[\alpha(B)]^{-1}, \tag{17a}$$

$$X = [\beta(A)]^{-1}(C_\nu + \beta_1 C_{\nu-1} + \cdots + \beta_{\nu-1}C_1). \tag{17b}$$

利用 $C = C_A C'_B$, 可验知

$$C^\alpha = (C_A, AC_A, \cdots, A^{\mu-1}C_A)(H_\alpha \otimes I_q)\begin{pmatrix} C'_B \\ C'_B B \\ \vdots \\ C'_B B^{\mu-1} \end{pmatrix}, \tag{18a}$$

$$C^\beta = (C_A, AC_A, \cdots, A^{\nu-1}C_A)(H_\beta \otimes I_q)\begin{pmatrix} C'_B \\ C'_B B \\ \vdots \\ C'_B B^{\nu-1} \end{pmatrix}. \tag{18b}$$

将(14)代入(18)和(17),并注意到 $\alpha(\lambda)$ 和 $\beta(\lambda)$ 分别是 K'_α 和 K_β 的最小多项式,对 $\nu\geqslant\mu$ 利用(17a),对 $\mu\geqslant\nu$ 利用(17b),即有(12)及(13)式.

2 解 X 的性质

当矩阵方程(1)有唯一解 X 时,我们可利用以上结果,给出 X 的以下性质.简单的证明从略.

定理2 设(1)有唯一解 X,则

(a) $\mathrm{Im}X\subset\mathrm{Im}(C,AC,\cdots,A^{m-1}C)$,

(b) $\mathrm{Ker}X\supset\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}C'B'^{i-1}$,

(c) $\mathrm{rank}X\leqslant\min\{\bar{m},\bar{n}\}$,

其中

$$\begin{aligned}\bar{m}&=\mathrm{rank}(C,AC,\cdots,A^{m-1}C),\\ \bar{n}&=\mathrm{rank}(C',B'C',\cdots,(B')^{n-1}C').\end{aligned}\tag{19}$$

注1 通过下面的证明可以得出可控与可测在(1)的解中的作用.

给定 A,B,C,则有可逆阵 S 和 R 使

$$\hat{A}=S^{-1}AS=\begin{pmatrix}A_1 & A_3\\ O & A_2\end{pmatrix},$$

$$\hat{B}=R^{-1}BR=\begin{pmatrix}B_1 & O\\ B_3 & B_2\end{pmatrix},$$

$$\hat{C}=S^{-1}CR=\begin{pmatrix}C_1 & O\\ O & O\end{pmatrix},$$

其中 C_1 为 $\bar{m}\times\bar{n}$,(A_1,C_1) 可控,(B_1,C_1) 可测.如果(1)有唯一解,则

$$\hat{A}\hat{X}-\hat{X}\hat{B}=\hat{C}$$

有解

$$\hat{X}=\begin{pmatrix} X_1 & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 X_1是
$$A_1X_1-X_1B_1=C_1$$
的唯一解. 于是
$$\mathrm{rank}X=\mathrm{rank}\hat{X}=\mathrm{rank}X_1\leqslant\min\{\overline{m},\overline{n}\}.$$

推论1 设(1)有唯一解 X,则

(a) 只有当 $n\leqslant m$ 及(C,B)可测时,X 的列向量线性无关.

(b) 只有当 $m\leqslant n$ 及(A,C)可控时,X 的行向量线性无关.

(c) 当 $m=n$ 时,只有(A,C)可控且(C,B)可测才有 C 可逆.

定理3 设 μ^* 和 ν^* 分别是引理3中定义的 $\alpha^*(\lambda)$和 $\beta^*(\lambda)$的次数,并令
$$\eta=\min[\mu^*,\nu^*].$$
如果(1)有唯一解 X,则
$$\mathrm{rank}X\leqslant\min[r^*,s^*],\tag{20}$$
其中,
$$r^*=\mathrm{rank}(C,AC,\cdots,A^{\eta-1}C),$$
$$s^*=\mathrm{rank}(C',B'C',\cdots,(B')^{\eta-1}C').$$

证明 由推论1及定理1,得
$$X=(C_A,AC_A,\cdots,A^{\mu^*-1}C_A)(\Gamma^*\otimes I_q)\begin{pmatrix} C'B \\ C'_BB \\ \vdots \\ C'_BB^{\nu^*-1}\end{pmatrix},\tag{21}$$
其中 Γ^* 可通过解(5)得到,并且
$$\alpha(\lambda)=\alpha^*(\lambda)=\lambda^{\mu^*}+\alpha_1^*\lambda^{\mu^*-1}+\cdots+\alpha_{\mu^*}^*$$
及
$$\beta(\lambda)=\beta^*(\lambda)=\lambda^{\nu^*}+\beta_1^*\lambda^{\nu^*-1}+\cdots+\beta_{\nu^*}^*.$$
假定 $\nu^*\geqslant\mu^*$,由引理4,得

$$\Gamma^* = -(H_{\alpha^*}, O_{\mu^* \times (\nu^* - \mu^*)})[\alpha^*(K_{\beta^*})]^{-1}. \tag{22}$$

设 $$T^* = (H_{\alpha^*}, O_{\mu^* \times (\nu^* - \mu^*)}),$$

及 $$[\alpha^*(K_{\beta^*})]^{-1} = P^*(K_{\beta^*}),$$

其中 $P^*(\lambda)$是一多项式. 现在,

$$\Gamma^* \otimes I_q = (T^* P^*(K_{\beta^*})] \otimes I_q$$
$$= (T^* \otimes I_q)[P^*(K_{\beta^*}) \otimes I_q].$$

因 K_{β^*}是一个伴侣矩阵,故

$$(K_{\beta^*} \otimes I_q)\begin{pmatrix} C'_B \\ C'_B B \\ \vdots \\ C'_B B^{\nu^*-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C'_B \\ C'_B B \\ \vdots \\ C'_B B^{\nu^*-1} \end{pmatrix} B,$$

从而,

$$[P^*(K_{\beta^*}) \otimes I_q]\begin{pmatrix} C'_B \\ C'_B B \\ \vdots \\ C'_B B^{\nu^*-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C'_B \\ C'_B B \\ \vdots \\ C'_B B^{\nu^*-1} \end{pmatrix} P^*(K_{\beta^*}). \tag{24}$$

将(24),(23)及(22)代入(21),有

$$X = -(C_A, AC_A, \cdots, A^{\mu^*-1}C_A)(T^* \otimes I_q)\begin{pmatrix} C'_B \\ C'_B B \\ \vdots \\ C'_B B^{\nu^*-1} \end{pmatrix}[\alpha^*(B)]^{-1}$$

$$= -(C_A, AC_A, \cdots, A^{\mu^*-1}C_A)(H_{\alpha^*} \otimes I_q)\begin{pmatrix} C'_B \\ C'_B B \\ \vdots \\ C'_B B^{\mu^*-1} \end{pmatrix}[\alpha^*(B)]^{-1}, \tag{25}$$

所以,

$$\operatorname{rank}X \leqslant \min\{\operatorname{rank}[C_A, AC_A, \cdots, A^{\mu^*-1}C_A],$$

$$\operatorname{rank}[C_B, B'C_B, \cdots, (B')^{\mu^*-1}C_B]\}. \tag{26}$$

当 $\mu^* \geqslant \nu^*$ 时，我们同理可有

$$X = [\beta^*(A)]^{-1}(C_A, AC_A, \cdots, A^{\nu^*-1}C_A)(H_{\beta^*} \otimes I_q)\begin{pmatrix} C'_B \\ C'_B B \\ \vdots \\ C'_B B^{\nu^*-1} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

所以，

$$\operatorname{rank}X \leqslant \min\{\operatorname{rank}[C_A, AC_A, \cdots, A^{\nu^*-1}C_A],$$

$$\operatorname{rank}[C_B, B'C_B, \cdots, (B')^{\nu^*-1}C_B]\}. \tag{28}$$

最后，由于用 C 代替(26)及(28)中的 C'_A 及 C'_B 后矩阵的秩不变，我们便知(20)成立. □

注2 定理3中 $\operatorname{rank}X$ 的界要比定理2中的好，如设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\overline{m}=\overline{n}=4$，由定理2

$$\mathrm{rank}X\leqslant 4.$$

现在 $\mu^*=2,\nu^*=3$ 及 $\eta=2$；定理3中定义的 r^* 及 s^* 可通过计算得

$$r^*=4,s^*=3,$$

所以，由(20)，$\mathrm{rank}X\leqslant 3$. 直接计算可得

$$X=\begin{pmatrix}-3&2&-1&0&0\\-1&1&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\mathrm{rank}X=3$. 易验知，如果用 A 和 B 的最小多项式代替 α^* 和 β^*，则(20)的界为 $\mathrm{rank}X\leqslant 4$.

下面考虑当 $\mathrm{rank}C=1$时的情形.

记

$$C=C_AC'_B, \tag{29}$$

其中 $C_A(C'_B)$是一个非零列(行)向量. 设 $\alpha^*(\lambda)(\beta^*(\lambda))$是 $C_A(C_B)$的最小多项式，μ^* 为 α^*的次数，ν^* 为 β^*的次数.

定理4 若(1)有唯一解 X 及 $\mathrm{rank}C=1$，则

$$\mathrm{rank}X=\eta^*\triangleq\min[\mu^*,\nu^*], \tag{30}$$

其中，

$$\mu^*=\mathrm{rank}(C,AC,\cdots,A^{m-1}C),$$

$$\nu^*=\mathrm{rank}(C',B'C',\cdots,(B')^{n-1}C').$$

当 $\nu^*\geqslant\mu^*$时，

$$\operatorname{Im}X=\operatorname{Im}(C,AC,\cdots,A^{m-1}C), \tag{31}$$

当 $\mu^* \geqslant \nu^*$ 时，

$$\operatorname{Ker}X=\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker}CB^{i-1}. \tag{32}$$

证明 设 $\nu^* \geqslant \mu^*$，由(25)及 $q=1$，得

$$X=-(C_A,AC_A,\cdots,A^{\mu^*-1}C_A)(H_{\alpha^*})\begin{pmatrix}C'_B\\ C'_BB\\ \vdots\\ C'_BB^{\mu^*-1}\end{pmatrix}[\alpha^*(B)]^{-1}.$$

因 H_{α^*} 可逆及当 $\nu^* \geqslant \mu^*$ 时，

$$\begin{pmatrix}C'_B\\ C'_BB\\ \vdots\\ C'_BB^{\mu^*-1}\end{pmatrix}$$

的行向量线性无关，故 $\operatorname{rank}X=\mu^*$. 同理，当 $\mu^* \geqslant \nu^*$ 时，(27)式意味着 $\operatorname{rank}X=\nu^*$，从而有(30). 由(30)及定理2即可得(31)及(32). □

推论2 若(1)有唯一解 X，$\operatorname{rank}C=1$，且 $m=n$，则 X 可逆当且仅当(A,C)可控与(C,B)可测.

证明 由(30)，X 可逆当且仅当

$$\mu^*=\nu^*=n=m,$$

当且仅当(A,C)可控与(C,B)可测. □

定理5 设 $\operatorname{rank}C=1$，(A,C)可控且(C,B)可测，如果(1)相容，则(1)必有唯一解.

证明 设 C 同(29)，设

$$S=(C_A,AC_A,\cdots,A^{m-1}C_A), \tag{33}$$

$$R=(C_B,B'C_B,\cdots,(B')^{n-1}C_B). \tag{34}$$

由假设知，S 与 R 均可逆．令

$$\hat{A}=S^{-1}AS=K'_{\alpha}, \tag{35}$$

$$\hat{B}=RBR^{-1}=K_{\beta}, \tag{36}$$

$$\hat{C}=S^{-1}CR^{-1}=(1,0,\cdots,0)'(1,0,\cdots,0). \tag{37}$$

将引理2应用到方程

$$\hat{A}\hat{X}-\hat{X}\hat{B}=\hat{C}$$

即得所证．□

注3　定理3对于 $\mathrm{ran}C\neq 1$ 失效．如考虑(1)，其中

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

注4　定理4与定理5推广和阐明了§9中的定理1．

§11　矩阵方程 $AX+XB'=C$ 及应用

本节考虑实数域的任一子域△上的矩阵方程

$$AX+XB'=C \tag{1}$$

的求解问题[125]．给出了(1)的相容条件及相容方程的解法，给出了它在矩阵分解理论与多项式理论上的应用，得到了方程

$$AX+XA'=-I_n$$

有解的必要或充分条件，从而明确了何时可以构造 ляпунов 函数的一些条件．

1　矩阵方程(1)的相容条件及解法

考虑矩阵方程(1)，其中 $A\in\triangle^{m\times m}$，$B\in\triangle^{n\times n}$，$C\in\triangle^{m\times n}$ 为已知阵，$X\in\triangle^{m\times n}$ 为未知矩阵．

定理1　对于(1)，设 B 在△上的所有非常数不变因子是

$$d_i(\lambda)=\lambda^{r_i}+b_{i1}\lambda^{r_i-1}+\cdots+b_{i,r_{i-1}}\lambda+b_{ir_i}, \tag{2}$$

$i=1,\cdots,s$，$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$．又设 $d_i(\lambda)$ 的伴侣阵(Frobenius 块)是

$$F_i=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_{ir_i} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -b_{i,r_i-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -b_{i,r_i-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -b_{i1} \end{pmatrix},i=1,\cdots,s, \tag{3}$$

（F_i 是上 Hessenberg 阵），且

$$PBP^{-1}=\begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_s \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 P 是△上的 $n\times n$ 可逆阵．记

$$XP'=(X_1,\cdots,X_s),X_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ir_i}),i=1,\cdots,s; \tag{5}$$

$$CP'=(C_1,\cdots,C_s),C_i=(\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots,\eta_{ir_i}),i=1,\cdots,s, \tag{6}$$

这里 x_{ij},η_{ij}分别是 m 维未知向量与 n 维向量，$i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,r_i$，则

(i)　矩阵方程(1)相容的充要条件是下列 $m\times m$ 线性方程组

$$d_i(-A)x_{ir_i}=\sum_{j=1}^{r_i}(-1)^jA^{j-1}\eta_{ij},j=1,\cdots,s \tag{7}$$

全是相容方程组．

(ii)　当(7)相容时，(1)的解 X 可表为

$$X=(x_{11},\cdots,x_{1r_1},\cdots,x_{s1},\cdots,x_{sr_s})(P')^{-1}$$

其中 x_{ir_i}是(7)的解，$i=1,\cdots,s$，而

$$x_{i,r_i-j}=\sum_{k=1}^{j}(-)^{k-1}A^{k-1}\eta_{i,r_i-j+k}+(\sum_{k=0}^{j}b_{i,j-k}A^k)x_{ir_i}. \tag{9}$$

证明　矩阵方程(1)与矩阵方程

$$A(XP')+(XP')(PBP^{-1})'=CP' \tag{10}$$

同解．由(3)，(5)，(6)，(10)可知，(1)与矩阵方程组

$$AX_i+X_iF'_i=C_i, i=1,\cdots,s$$

同解，而上面的方程组即是

$$A(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ir_i})+(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ir_i})\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_{ir_i} & -b_{i,r_i-1} & -b_{i,r_i-2} & \cdots & -b_{i1} \end{pmatrix}$$
$$=(\eta_{i1},\eta_{i2},\cdots,\eta_{ir_i}), i=1,\cdots,s.$$

或者

$$\begin{aligned} &Ax_{i1} - b_{ir_i}x_{ir_i}=\eta_{i1} \\ &x_{i1}+Ax_{i2} - b_{i,r_i-1}x_{ir_i}=\eta_{i2} \\ &x_{i2}+Ax_{i3} - b_{i,r_i-2}x_{ir_i}=\eta_{i3} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &x_{i,r_i-2}+Ax_{i,r_i-1}-b_{i2}x_{ir_i}=\eta_{i,r_i-1} \\ &x_{i,r_i-1}-(b_{i1}I_m-A)x_{ir_i}=\eta_{ir_i} \end{aligned} \tag{11}$$

$(i=1,\cdots,s)$. 故(1)与方程组(11)同解.

分别以$-A_0, A, -A^2, \cdots, (-1)^{r_i-1}A^{r_i-1}, (-1)^{r_i}A^{r_i}$由上到下依次左乘(11)的第2,3,…,$r_i-1$,$r_i$诸式两边并相加，即得

$$d_i(-A)x_{ir_i}=-\eta_{i1}+A\eta_{i2}-\cdots+(-1)^{r_i}A^{r_i-1}\eta_{ir_i}, i=1,\cdots,s, \tag{12}$$

这就是(7)式.

又显然可知将(12)式减去分别以$A, -A^2, \cdots, (-1)^{r_i-1}A^{r_i-1}$左乘(11)的第2,3,…,$r_i$各式，即得(11)的第一个式子，$i=1,\cdots,s$，因而可知(11)与下面的未知向量方程组同解：

$$
\begin{aligned}
x_{i1}+Ax_{i2} &= \eta_{i2}+b_{i,r_i-1}x_{ir_i}\\
x_{i2}+Ax_{i3} &= \eta_{i3}+b_{i,r_i-2}x_{ir_i}\\
&\cdots\cdots\\
x_{i,r_i-2}+Ax_{i,r_i-1} &= \eta_{i,r_i-1}+b_{i2}x_{ir_i} \qquad (13)\\
x_{i,r_i-1} &= \eta_{ir_j}+(b_{i1}I_m-A)x_{ir_i}\\
d_i(-A)x_{ir_i} &= \sum_{j=1}^{r_i}(-1)^jA^{j-1}\eta_{ij}
\end{aligned}
$$

$(i=1,2,\cdots,s)$. 于是矩阵方程(13)与向量方程组(1)同解，故即得定理1的第(i)个结论，又在(ii)的假设条件下，由(13)的前 r_i-1 个等式，并经过简单计算，即得(9)式. □

推论1 设 A,B,C 及(2)～(5)的假设同定理1，$m(\lambda)$ 是 B 在 $\triangle$ 上的最小多项式，则

(i) 矩阵方程(1)在 $\triangle$ 上有唯一解的充要条件是 $m(-A)$ 为可逆阵.

(ii) 当(1)有唯一解时，(1)的唯一解可表成(8)、(9)及下式

$$x_{ir_i}=(d_i(-A))^{-1}\sum_{j=1}^{r_i}(-1)^jA^{j-1}\eta_{ij},i=1,\cdots,s. \qquad (14)$$

证明 如果(1)在 $\triangle$ 上有唯一解，则由定理1，方程组(7)有唯一解，于是由 Cramer 法则的逆定理可知，$d_i(-A)$ 全是可逆阵，$i=1,\cdots,s$. 但 $d_s(\lambda)=m(\lambda)$，故 $m(-A)$ 是可逆阵.

反之，如果 $m(-A)$，即 $d_s(-A)$ 是可逆阵，则由于恒有

$$d_i(\lambda)\,|\,d_{i+1}(\lambda),i=1,\cdots,s-1,$$

故

$$d_s(\lambda)=d_i(\lambda)\varphi(\lambda),\varphi(\lambda)\in\triangle[\lambda],i=1,\cdots,s,$$

所以

$$d_s(-A)=d_i(-A)\varphi_i(-A),i=1,\cdots,s.$$

由上面诸式可知，$d_i(-A)$ 必是可逆阵，$i=1,\cdots,s$. 于是由定理1可知，(1)在 $\triangle$ 上有唯一解，且可把(7)式改写为(14)式. □

例 设

$$A=\begin{pmatrix}6 & -5\\ 8 & -6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}7 & -5 & -1\\ 7 & -5 & 0\end{pmatrix},$$

在有理数域上解矩阵方程 $AX+XB'=C$.

解 可先解矩阵方程 $BX'+X'A'=C'$（为了简化计算之故），容易看出，A 只有一个非常数不变因子，即 $d(\lambda)=\lambda^2+4$，故 A 的 Frobenius 标准形为

$$F=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

并且
$$P=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

使 $PAP^{-1}=F$. 记

$$X'=(x_1,x_2)(P')^{-1}; \tag{15}$$

由于

$$d(-B)=B^2+4I_3=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ -1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

是非异阵（因为它是严格对角占优阵），故原方程组有唯一解，今因

$$(\eta_1,\eta_2)=C'P'=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -5 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

故由

$$d(-B)x_2=-\eta_1+B\eta_2=\begin{pmatrix}-6\\ 6\\ 1\end{pmatrix}$$

解出 x_2 为

$$x_2=d(-B)^{-1}\begin{pmatrix}-6\\ 6\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{73}\begin{pmatrix}20 & 7 & 5\\ 4 & 16 & 1\\ -1 & -4 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\ 6\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},$$

又由(9)式可知

$$x_1=\eta_2-Bx_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix};$$

于是由(15)式得

$$X=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

所以原方程组 $AX+XB'=C$ 的唯一解为

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

推论2 矩阵方程(1)在$\triangle$上有唯一解的充要条件是 $f(A)$为非奇异阵,这里 $f(\lambda)=\det(\lambda I_n+B)$.

证明 由 Frobenius 定理:B 的特征多项式$\triangle(\lambda)=\det(\lambda I_n+B)$在$\triangle$上的任一不可约因式必是 B 的最小多项式 $m(\lambda)$的因式,故 $m(-A)$可逆的充要条件是$\triangle(-A)$是可逆阵,又由于

$$\triangle(\lambda)=(-1)^n f(-\lambda),$$

于是,

$$\triangle(-A)=(-1)^n f(A),$$

所以 $m(-A)$是可逆的充要条件是 $f(A)$是可逆的.再由推论1立得推论2. □

推论3 设 $d_1(\lambda)$是 B 的第一个非常数不变因子,且 $d_1(-A)$是奇异阵,则(1)在$\triangle$上或者无解,或者有无穷多解.

2 矩阵方程 $AX+XA'=C$

本段讨论特殊情形:$m=n$,$B=A$,C 是 $m\times m$ 正定阵或负定阵.此时记

$$PAP^{-1}=F=\begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_s \end{pmatrix},$$

其中 F_i 是 A 的非常数不变因子

$$d_i(\lambda)=\lambda^{r_i}+a_{i1}\lambda^{r_i-1}+\cdots+a_{ir_i}$$

的友阵，$i=1,\cdots,s,d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda),i=1,\cdots,s-1$.

定理2 设 A 是 $m\times m$ 可逆阵，C 是 $m\times m$ 正定阵（或负定阵），则

$$AX+XA'=C. \tag{16}$$

在△上必无解.

证明 显然可把矩阵方程(16)化成同解矩阵方程

$$(PAP^{-1})(PXP')+(PXP')(PAP^{-1})'=PCP'.$$

令

$$PXP'=(x_{11},\cdots,x_{1r_1},\cdots,x_{s1},\cdots,x_{sr_s}),$$

$$PCP'=(\eta_{11},\cdots,\eta_{1r_1},\cdots,\eta_{s1},\cdots,\eta_{sr_s}).$$

与定理1的证明相同，可把定理1的两个结论换成：

(i) (16)在△上有解的充要条件是

$$d_i(-F)x_{ir_i}=\sum_{j=1}^{r_i}(-1)^jF^{j-1}\eta_{ij},i=1,\cdots,s \tag{17}$$

全是相容方程组.

(ii) 当(17)是相容方程组时，(16)的解可表成

$$X=P^{-1}(x_{11},\cdots,x_{1r_1},\cdots,x_{s1},\cdots,x_{sr_s})(P')^{-1} \tag{18}$$

其中 x_{ir_i}是(17)的解，$i=1,\cdots,s$，而

$$x_{i,r_i-j}=\sum_{k=1}^{j}(-1)^{k-1}F^{k-1}\eta_{i,r_i-j+k}+(\sum_{k=0}^{j}a_{i,j-k}F^k)x_{i,r_i}, \tag{19}$$

$i=1,\cdots,s;j=1,\cdots,r_i-1$.

由于 A 可逆，故至少有一个 $a_{k,r_k}=0$，于是 F_k 的第一行是零向量，即

$$F_k=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{k,r_k-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{k,r_k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{k1} \end{pmatrix},1\leqslant k\leqslant s,$$

即 F 的第 $r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1$ 行为 O. 考虑方程组(17)的第 k 个线性方程组

$$d_k(-F)x_{kr_k}=\sum_{j=1}^{r_k}(-1)^j F^{j-1}\eta_{k_j}. \tag{20}$$

若(20)有解，则 $d_k(-F)x_{kr_k}$ 的第 $r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1$ 个分量是0. 另一方面，(20)的右边可改写成

$$\sum_{j=1}^{r_i}(-1)^j F^{j-1}\eta_{kj}=-\eta_{k1}+F(\sum_{j=2}^{r_i}(-1)^j F^{j-2}\eta_{kj}. \tag{21}$$

显然，$F(\sum_{j=2}^{r_i}(-1)^j F^{j-2}\eta_{kj})$ 的第 $r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1$ 个分量是0，又因 C 是正定阵(或负定阵)，所以 $C=QQ'$ (或 $(PQ)(PQ)'$)，其中 Q 是可逆阵. 于是，$-\eta_{k1}$ 就是 $(PQ)(PQ)'$ (或 $-(PQ)(PQ)'$ 的第 $r_1+\cdots+r_{k-1}+1$ 列. 令 $(PQ)'$ 的第 $r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1$ 列为 β，则 $\beta\neq0$，显然可知，$(PQ)(PQ)'$ (或 $-(PQ)(PQ)'$) 的第 $r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1$ 列为 $-\eta_{k1}$ 的第 $r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1$ 个分量是 $-\beta'\beta$ 或 $(\beta'\beta)$，但 $\beta'\beta\neq0$，故(21)的第 $r_1+r_2+\cdots+r_{k-1}+1$ 个分量不为0，此为矛盾，故方程组(20)无解，亦即(16)无解. □

注1 定理2的一个特例是，当 A 可逆时，ляпунов 方程 $AX+XA'=-I$ 必无解，也就是，只有当 A 是可逆阵时才有可能去找 ляпунов 函数.

定理3 设 C 是正定阵(或负定阵)，又设可逆阵 A 的最小多

项式 $m(\lambda)=d_s(\lambda)$ 是偶次多项式，且

$$d_s(\lambda)=\lambda^{r_s}+a_{s2}\lambda^{r_s-2}+\cdots+a_{sr_s},$$

则

(i) 当 $\sum_{j=1}^{r_s}(-1)^j F^{j-1}\eta_{sj}\neq 0$ 时，矩阵方程(16)必无解；

(ii) 当 $\sum_{j=1}^{r_s}(-1)^j F^{j-1}\eta_{sj}=0$，并且

$$d_i(-F)x_{ir_i}=\sum_{j=1}^{r_i}(-1)^j F^{j-1}\eta_{ij},i=1,\cdots,s-1$$

全是相容方程组时，(16)必有无穷多个解，且 x_{sr_s} 可取△上的任何 n 维列向量.

证明 因为

$$d_s(-F_k)=d_s(F_k),k=1,\cdots,s, \tag{22}$$

而由 Hamilton—Cayley 定理，$d_k(F_k)=0,k=1,\cdots,s$，但 $d_k(\lambda)|d_s(\lambda),k=1,\cdots,s$，所以由(22)式即得 $d_s(-F_k)=0,k=1,\cdots,s$，于是，

$$d_s(-F)=\begin{pmatrix} d_s(-F_1) & & & \\ & d_s(-F_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_s(-F_s)\end{pmatrix}=O,$$

所以由(17)式可知定理得证. □

注2 定理3说明，并非任何可逆矩阵 A 都可构作 ляпунов 函数.

3 矩阵方程 $AX=XB'$ 及其应用

定理4 设 $A\in\triangle^{m\times m},B\in\triangle^{n\times n}$ 为已知阵，$X\in\triangle^{m\times n}$ 为未知阵，如果 B 的非常数不变因子是

$$d_i(\lambda)=\lambda^{r_i}+b_{i1}\lambda^{r_i-1}+\cdots+b_{ir_i},i=1,\cdots,s,$$

$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$，$i=1,\cdots,s-1$，又设 $d_i(\lambda)$ 的伴侣阵是形如(3)的 F_i，$i=1,\cdots,s$，且

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix} F'_1 & & & \\ & F'_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F'_s \end{pmatrix} \tag{23}$$

其中 $Q\in GL_n(\triangle)$，记 $X(Q')^{-1}=(X_1,X_2,\cdots,X_s)$，$X_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ir_i})$，$i=1,\cdots,s$，$x_{ij}$ 是 m 维未知列向量，$i=1,\cdots,s$；$j=1,\cdots,r_i$，则

(i) 矩阵方程

$$AX=XB' \tag{25}$$

在△上有非零解的充要条件是 $m(A)$ 是奇异阵，其中 $m(\lambda)$ 是 B 在△上的最小多项式.

(ii) 如果 $d_1(A)$ 是奇异阵，则(25)在△上的非零解可由解

$$X=(x_{11},\cdots,x_{1r_1},\cdots,x_{s1},\cdots,x_{sr_2})Q' \tag{26}$$

及

$$d_i(A)x_{i1}=O, \tag{27}$$

$$x_{ij}=A^{j-1}x_{i1}, \tag{28}$$

得出，$i=1,\cdots,s$；$j=1,\cdots,r_i$.

证明 由(23)与(24)可知，矩阵方程(25)与矩阵方程组

$$AX_i-X_iF_i=O, i=1,\cdots,s$$

同解，即与

$$A(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ir_i})$$

$$-(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ir_i})\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_{ir_i} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -b_{i,r_i-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -b_{i,r_i-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -b_{i1} \end{pmatrix}=0,$$

$(i=1,2,\cdots,s)$，同解，所以(25)与向量方程组

$$Ax_{i,k}-x_{i,k+1}=0, k=1,2,\cdots,r_i-1, \quad (29)$$

$$b_{ir_i}x_{i1}+b_{i,r_i-1}x_{i2}+\cdots+b_{i2}x_{i,r_i-1}+(A+b_{i1}I_m)x_{ir_i}=0, \quad (30)$$

$i=1,\cdots,s$，同解，易知(29)可化为(28)式，再把(28)式代入(30)式即得(27)．反之，由(27)、(28)诸式可得(29)、(30)诸式，故(26)、(27)、(28)与(25)同解．

当 $m(A)=d_s(A)$ 是奇异阵时，由(26)～(28)可知，(25)有非零解．反之，若(25)有非零解，则(27)中至少有一个方程组有非零解，也即至少有一个 $d_i(A)$ 是奇异阵，但 $d_i(\lambda)|m(\lambda)$，故 $m(A)$ 必为奇异阵，这就证明了(i)．

又当 $d_1(A)$ 是奇异阵时，则 $m(A)$ 也是奇异阵，故(25)的非零解可由(26)～(28)得出．□

推论4 设 $A\in\triangle^{m\times m}, B\in\triangle^{n\times n}, X\in\triangle^{m\times n}$ 为未知阵，$g(\lambda)$ 是 B 的特征多项式，则(25)有非零解的充要条件为 $g(A)$ 是奇异阵．

推论5 如果 $n\times n$ 阵 B 的某个非常数不变因子 $d_i(\lambda)$ 使得 $d_i(A)$ 为非奇异阵，$1\leqslant i\leqslant s$，其中 A 是 $m\times m$ 阵，则(25)的解为

$$X=(0,\cdots,0,x_{i+1,1},\cdots,x_{i+1,r_{i+1}},\cdots,x_{s1},\cdots,x_{sr_s})Q' \quad (31)$$

其中 $Q\in GL_n(\triangle)$ 且满足(23)．

证明 当 $d_i(A)$ 是非奇异阵时，由 $d_j(\lambda)|d_i(\lambda), j=1,\cdots,i$ 可知，$d_j(A)$ 全是非奇异阵，故由(27)知，$d_j(A)x_{j1}=O$ 只有零解，$j=1,\cdots,i$．又由(28)及(26)即得(31)．□

推论6 设 $A\in GL_m(\triangle)$，$d_i(\lambda)$ 是 $n\times n$ 阵 B 的非常数不变因子，且成立(23)，如果(25)的解

$$X=(x_{11},\cdots,x_{1r_1},\cdots,x_{s1},\cdots,x_{sr_s})Q'$$

中有某个 $x_{ij}=0$，则 $x_{i1}=\cdots=x_{ij}=\cdots=x_{ir_i}=0$．

证明 因 $x_{ij}=0$，且 A 是可逆的，故由(29)可知

$$x_{i1}=x_{i2}=\cdots=x_{i,j-1}=0,$$

并由(28)还可得

$$x_{i,j+1}=\cdots=x_{ir_i}=0. \qquad \square$$

由于△上的任何多项式 $g(\lambda)$ 都可以看作它的友阵的特征多项式.设 G 与 F 分别是△上 n 次多项式 $g(\lambda)$ 与 m 次多项式 $f(\lambda)$ 的伴侣阵,考虑相应的矩阵方程 $FX-XG'=O$,由于任意矩阵方程 $AX-XB'=O$ 有非零解的充要条件为 A 与 B 至少有一公共特征值,对 $FX-XG'=O$ 来说,也就是它有非零解的充要条件是 F 与 G 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 有公根,再由推论4,$FX-XG'=O$ 有非零解的充要条件是 $g(F)$ 为奇异阵,综上所述,我们顺便得到下面的

推论7(Barnett) 设 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 分别是 m 次多项式和 n 次多项式,F 是 $f(\lambda)$ 的伴侣阵,则 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 有公根的充要条件是 $g(F)$ 为奇异阵.

显然可用 Barnett 定理代替结式理论.

当 $m=n,B=A$ 时,则 $g(\lambda)=\det(\lambda I_n-B)=\det(\lambda I_n-A)$,由 Hamilton—Cayley 定理,$g(A)=O$,故由推论4可知,$AX-XA'=O$ 必有非零解,进一步可得下面的

定理5 设 A 是△上的 $n\times n$ 阵,

$$A=Q\begin{pmatrix} F'_1 & & & \\ & F'_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F'_s \end{pmatrix}Q^{-1}, \tag{32}$$

其中 $Q\in GL_n(\triangle)$,且

$$F_i=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{ir_i} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{i,r_i-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{i,r_i-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{i1} \end{pmatrix}, \tag{33}$$

则 $AX-XA'=O$ 在△上必有形如下式的"非零对称阵"解

$$X=Q'\begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_s \end{pmatrix}Q \tag{34}$$

而

$$T_i=(\alpha_{i1},F'_i\alpha_{i1},F'^2_i\alpha_{i1},\cdots,F'^{r_i-1}_i\alpha_{i1})$$

$$=\begin{pmatrix} t_{i1} & t_{i2} & t_{i3} & \cdots & t_{i,r_i-1} & t_{ir_i} \\ t_{i2} & t_{i3} & & & & t_{i,r_i+1} \\ t_{i3} & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ t_{i,r_i-1} & & & & & \vdots \\ t_{ir_i} & t_{i,r_i+1} & \cdots & \cdots & \cdots & t_{i,2r_i} \end{pmatrix}, \tag{35}$$

其中，$\alpha_{i1}=(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{ir_i})'$，$i=1,\cdots,s$ 是任意 r_i 维非零列向量，而 t_{i,r_i+j}是 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i}$的多项式，$j=1,\cdots,r_i$.

证明 令

$$(Q')^{-1}XQ^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1s} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{s1} & X_{s2} & \cdots & X_{ss} \end{pmatrix}$$

其中 X_{ij} 是 $r_i \times r_j$ 未知矩阵，$i,j=1,\cdots,s$，于是

$$AX-XA'=O$$

与

$$F'_j X_{ij}-X_{ij}F_j=O, i,j=1,\cdots,s \tag{36}$$

同解. 今特别取这种解

$$X_{ij}=O, i\neq j, i,j=1,\cdots,s.$$

于是由(36)式可得

$$F'_i\alpha_{ik}-\alpha_{i,k+1}=O, k=1,\cdots,r_i-1, \tag{37}$$

$$a_{ir_i}\alpha_{i1}+a_{i,r-1}\alpha_{i2}+\cdots+a_{i2}\alpha_{i,r_i-1}+(F'_i+a_{i1}I_{r_i})\alpha_{ir_i}=O. \tag{38}$$

由(37)的 r_i-1 个等式即得

$$\alpha_{ij}=F'^{j-1}_i\alpha_{i1}, i=1,\cdots,s; j=1,\cdots,r_i, \tag{39}$$

而(38)全是恒等 式，因以(39)代入(38)得

$$(F'^{r_i}_i+a_{i1}F'^{r_i-1}_i+\cdots+a_{i,r_i-1}F'_i+a_{i,r_i}I_{r_i})\alpha_{i1}=0.$$

由 Hamilton—Cayley 定理即知上式是恒等式，即 α_{i1} 可取△上任意 r_i 维列向量，今取

$$\alpha_{i1}=(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{ir_i})'\neq O,$$

于是，

$$X=Q'\begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_s \end{pmatrix}Q$$

是 $AX-XA'=O$ 的非零解，此处

$$X_{ii}=(\alpha_{i1},F'_i\alpha_{i1},F'^2_i\alpha_{i1},\cdots,F'^{r_i-1}_i\alpha_{i1})=T_i, i=1,\cdots,s.$$

因为对任何 r_i 维列向量 β，$F'_i\beta$ 的第1，2，…，r_i-1 个分量与 β 的第2，3，…，r_i 个分量依次对应相等，故知 T_i 是形如(35)的非零对称阵. □

今在 $AX-XA'=O$ 的上述非零解中，特别取

$$\alpha_{i1}=(0,0,\cdots,0,t_{ir_i})',t_{ir_i}\neq 0,i=1,\cdots,s,$$

则相应的 T_i 都是可逆阵，$i=1,\cdots,s$. 故有下面的

定理6 △上的矩阵方程 $AX-XA'=O$ 在△上必有可逆的对称阵解.

证明 当 $\alpha_{i1}=(0,\cdots,0,t_{i,r_i}),t_{ir_i}\neq 0$时，$T_i$ 显然是可逆对称阵，$i=1,\cdots,s$. 令

$$S=Q'\begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_s \end{pmatrix}Q,$$

则 S 对称且可逆并 $S=SA'$. □

由上知，$A=(SA')S^{-1}=S_1S_2$. 易知，$S_1=SA'$，$S_2=S^{-1}$都是△上的对称阵，且 S_2是可逆对称阵. 又显然可知，$A'Y=YA$ 在△上也有可逆对称阵解：$Y=M$，故 $A=M^{-1}(M'A)$，M^{-1}是可逆对称阵，而 $M'A$ 是对称阵. 于是有

推论8 △上的任何方阵 A 必可分解为△上两个对称阵的乘积，且其中有一个是可逆的.

§12 体上矩阵方程 $X-AXB=C$ 相容的一个充要条件

本节给出任意体 F 上的矩阵方程

$$X-AXB=C \tag{1}$$

相容的一个充要条件.

考虑 F 上的非交换多项环 $F[\lambda]$，λ 与 F 中元素均可换.

类似于本章§6定理3的证明，我们可以证得下面的

引理1 设 $\widetilde{A}\in F^{p\times p}[\lambda]$，$\widetilde{B}\in F^{q\times q}[\lambda]$，$\widetilde{C}\in F^{p\times q}[\lambda]$是已知矩阵，则矩阵方程

$$\widetilde{A}X-Y\widetilde{B}=\widetilde{C} \tag{2}$$

有解 $X,Y\in F^{p\times q}$ 的充要条件是有 $S,R\in GL_{p+q}(F)$ 使得

$$S\begin{pmatrix}\widetilde{A} & \widetilde{C}\\ O & \widetilde{B}\end{pmatrix}R=\begin{pmatrix}\widetilde{A} & O\\ O & \widetilde{B}\end{pmatrix}. \tag{3}$$

下面给出本节的主要结果.

定理1 F 上的矩阵方程(1)关于 X 有解的充要条件是存在 F 上的可逆阵 S 和 R 使得

$$S\left[\lambda\begin{pmatrix}I & O\\ O & B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A & -C\\ O & I\end{pmatrix}\right]R=\left[\lambda\begin{pmatrix}I & O\\ O & B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A & O\\ O & I\end{pmatrix}\right]. \tag{4}$$

证明 矩阵方程(1)可改写为矩阵方程

$$\begin{cases}X-AY=C\\ Y=XB\end{cases},$$

或等价于

$$(A+\lambda I)Y-X(I+\lambda B)=-C. \tag{5}$$

由引理1,(5)关于 X,Y 在 F 上有解的充要条件是有 F 上的可逆阵 S 和 R 使

$$S=\begin{pmatrix}A+\lambda I & -C\\ O & I+\lambda B\end{pmatrix}R=\begin{pmatrix}A+\lambda I & O\\ O & I+\lambda B\end{pmatrix}.$$

上式即为(4). 从而(1)有解当且仅当(4)成立. □

§13 环与体上的矩阵方程 $AXB+CYD=E$

本节研究矩阵方程

$$AXB+CYD=E. \tag{1}$$

在任意体 F 上,我们给出(1)的一种实用解法;在含幺正则环上,给出(1)有解的充要条件及其通解表达式;在单 Artinian 环和主理想环上给出其有解的充要条件.

1 (1)在任意体上的一种实用解法

在本章§6,我们曾给出 F 上的矩阵方程 $AX+YD=E$ 有解的几个充要条件及解的表达式.本段,我们将考虑 F 上更具一般性的矩阵方程(1),其中 $A\in F_r^{m\times n}$,$B\in F_s^{p\times q}$,$C\in F_{r_0}^{m\times k}$,$D\in F_{s_0}^{l\times q}$,$E\in F^{m\times q}$,利用双矩阵分解,给出(1)相容的充要条件及其一般解的表达式.

定理1 对于(1),设(A,C)和(B,D)的 RSR 分解和 DSC 分解分别为

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix},PCQ_0=\begin{pmatrix} O & I_{r_2} & O \\ O & O & O \\ I_{r_1} & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r_2 \\ r-r_2 \\ r_1 \\ m-r-r_1 \end{matrix}\quad; \tag{2}$$

$$VBU=\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} s \\ p-s \end{matrix},V_0DU=\begin{pmatrix} O & O & I_{s_1} & O \\ O & O & I_{s_1} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} s_1 \\ s_1 \\ p-s_0 \end{matrix}, \tag{3}$$

其中,$r_0=r_1+r_2$,$s_0=s_1+s_2$,

$$PEU=\begin{matrix} s_2 & s-s_2 & s_1 & q-s-s_1 \\ \left(\begin{matrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \\ E_{41} \end{matrix}\right. & \begin{matrix} E_{12} \\ E_{22} \\ E_{32} \\ E_{42} \end{matrix} & \begin{matrix} E_{13} \\ E_{23} \\ E_{33} \\ E_{43} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} E_{14} \\ E_{24} \\ E_{34} \\ E_{44} \end{matrix}\right) \end{matrix}\begin{matrix} \\ r_2 \\ r-r_2 \\ r_1 \\ m-r-r_1 \end{matrix}$$

则矩阵方程(1)有解的充要条件为 $E_{14},E_{23},E_{24},E_{32},E_{41},E_{42},E_{34},E_{44}$ 皆为零矩阵.有解时,其一般解为

$$X=Q\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11}-Y_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}V \tag{5}$$

$$Y=Q_0\begin{pmatrix}E_{33} & E_{31} & Y_{32}\\ E_{13} & Y_{22} & Y_{23}\\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33}\end{pmatrix}V_0, \tag{6}$$

其中，$Y_{11}\in F^{r_1\times s_1}$，$X_{12}\in F^{r\times(p-s)}$，$X_{21}\in F^{(n-r)\times s}$，$X_{22}\in F^{(n-r)\times(p-s)}$，$Y_{13}\in F^{r\times(l-s_0)}$，$Y_{22}\in F^{r_2\times s_2}$，$Y_{23}\in F^{r_2\times(l-s_0)}$，$Y_{31}\in F^{(k-r_0)\times s_1}$，$Y_{32}\in F^{(k-r_0)\times s_2}$，$Y_{33}\in F^{(k-r_0)\times(l-s_0)}$为任意的矩阵.

证明 矩阵方程(1)等价于下面的矩阵方程

$$PAQQ^{-1}XV^{-1}VBU+PCQ_0Q_0^{-1}YV_0^{-1}V_0DU=PEU. \tag{7}$$

令

$$Q^{-1}XV^{-1}=\begin{pmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}r\\ n-r\end{matrix},\quad(\text{列块 } s,\ p-s)$$

$$Q_0^{-1}YV_0^{-1}=\begin{pmatrix}Y_{11} & Y_{12} & Y_{13}\\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23}\\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33}\end{pmatrix}\begin{matrix}r_1\\ r_2\\ k-r_0\end{matrix},\quad(\text{列块 } s_1,\ s_2,\ 1-s_0)$$

则由(2)，(3)，(4)知，(7)即为

$$\begin{pmatrix}X_{11}+\begin{pmatrix}Y_{22} & O\\ O & O\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}Y_{21} & O\\ O & O\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}Y_{12} & O\\ O & O\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}Y_{11} & O\\ O & O\end{pmatrix}\end{pmatrix}\begin{matrix}r_2\\ r-r_2\\ r_1\\ m-r-r_1\end{matrix}$$

$$=\begin{pmatrix}E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14}\\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24}\\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34}\\ E_{41} & E_{42} & E_{431} & E_{44}\end{pmatrix}. \tag{8}$$

故

$$Y_{21}=E_{13},Y_{12}=E_{31},Y_{11}=E_{33},$$

$$X_{11}=\begin{pmatrix}E_{11}-Y_{22} & E_{12}\\ E_{21} & E_{22}\end{pmatrix};$$

此外，$E_{14}, E_{23}, E_{24}, E_{32}, E_{34}, E_{4i}(i=1,2,3,4)$皆为零矩阵．从而，(1)有解的充要条件及有解时的一般表达式立得证．□

2 (1)在含幺正则环上有解的充要条件及解的表达式

设R是一个含幺正则环，即$1\in R$且对每个$a\in R$，有a的一个内逆$a^{(1)}\in R$使$aa^{(1)}a=a$．含幺正则环R若每个$a\in R$都有一个单位内逆$a^{(1)}\in R$，则称R为单位正则的．在第一章§5中，我们指出了$A\in R^{m\times n}$有广义{1}逆的事实，本节的工具就是R上矩阵的广义{1}逆．1976年，Hartwig R. E.[74]考虑了单位正则环上的一类方程$ax+yd=e$，给出了其相容的一个充要条件

$$(1-aa^{(1)})e(1-d^{(1)}d)=0.$$

然而，当此方程相容时，其通解至今尚未建立．本段将在R上考虑矩阵方程(1)，给出其相容的充要条件及其通解表达式，其特例R上的方程

$$axb+cyd=e$$

被彻底解决，从而推广了〔74〕的结果．

下面考虑矩阵方程(1)，其中$A\in R^{m\times n}, B\in R^{p\times q}, C\in R^{m\times r}, D\in R^{l\times q}$及$E\in R^{m\times q}$．对于任意给定的矩阵$N$，为方便计，我们令

$$R_N=I-NN^{(1)} \tag{9}$$

$$L_N=I-N^{(1)}N \tag{10}$$

$$G=R_CA=(I-CC^{(1)})A \tag{11}$$

$$H=BL_D=B(I-D^{(1)}D). \tag{12}$$

定理2 R上的矩阵方程(1)相容的充要条件为

$$GG^{(1)}R_CEB^{(1)}B=R_CE,\ AA^{(1)}EL_DH^{(1)}H=EL_D, \tag{13}$$

或等价于

$$R_GR_CE=O,\ R_CEL_B=O,\ R_AEL_D=O,\ EL_DL_H=O. \tag{14}$$

有解时，其通解为

$$X = W - G^{(1)}GWBB^{(1)} - A^{(1)}AL_GWHH^{(1)} + A^{(1)}EL_DH^{(1)}$$
$$+ G^{(1)}G(G^{(1)}R_CEB^{(1)} - A^{(1)}EL_DH^{(1)})BB^{(1)}, \tag{15}$$
$$Y = V - C^{(1)}CVDD^{(1)} + C^{(1)}(E - AXB)D^{(1)}, \tag{16}$$
其中 $W \in R^{n \times p}$ 及 $V \in R^{r \times l}$ 为任意的.

证明 矩阵方程(1)可改写为

$$CYD = E - AXB. \tag{17}$$

由本章§3定理6知,(17)可解的充要条件为存在 $X \in R^{n \times p}$ 使

$$CC^{(1)}(E - AXB) = E - AXB$$

及

$$(E - AXB)D^{(1)}D = E - AXB,$$

或等价于矩阵方程组

$$(GXB, AXH) = (R_CE, EL_D) \tag{18}$$

有解 $X \in R^{n \times p}$.

若(17)可解,因(18)相容,利用本章§3定理6即知,矩阵方程

$$GXB = R_CE$$

与

$$AXH = EL_D$$

是可解的,且(13)⇔(14). 由(11)～(13),有

$$BB^{(1)}H = H$$

及

$$GG^{(1)}R_CEB^{(1)}H = GA^{(1)}EL_DH^{(1)}H. \tag{19}$$

令

$$X_0 = A^{(1)}EL_DH^{(1)} + G^{(1)}G(G^{(1)}R_CEB^{(1)} - A^{(1)}EL_DH^{(1)})BB^{(1)}. \tag{20}$$

则 X_0是(18)的解.

现设(1)是可解的,故

$$GXB = O$$

的通解为

$$X=U-G^{(1)}GUBB^{(1)}.$$

令

$$A(U-G^{(1)}GUBB^{(1)})H=O.$$

则

$$A(I-G^{(1)}G)UH=O.$$

我们选择$(I-G^{(1)}G)A^{(1)}$为$A(I-G^{(1)}G)$的一个广义逆，则

$$U=W-A^{(1)}AL_GWHH^{(1)}. \tag{21}$$

不难证明方程组

$$\begin{cases}GXB=O\\ AXH=O\end{cases}$$

的通解为

$$X=\hat{X}=W-G^{(1)}GWBB^{(1)}-A^{(1)}AL_GWHH^{(1)} \tag{22}$$

其中$W\in R^{n\times p}$为任意的.故(18)的通解形如

$$X=X_0+\hat{X}$$

即(15)式.对于(17)式，有

$$Y=C^{(1)}(E-AXB)D^{(1)}+V-C^{(1)}CVDD^{(1)}$$

其中$V\in R^{r\times l}$是任意的. □

推论1 设$A\in R^{m\times n}, D\in R^{l\times q}, E\in R^{m\times q}$，则矩阵方程

$$AX+YD=E$$

有解当且仅当

$$(I-AA^{(1)})E(I-D^{(1)}D)=O.$$

有解时，其通解为

$$X=W+A^{(1)}(E-AW)(I-D^{(1)}D),$$
$$Y=V-VDD^{(1)}+(E-AW)D^{(1)}DD^{(1)}$$

其中$W\in R^{n\times q}, V\in R^{m\times l}$是任意的.

推论2 R上的方程

$$axb+cyd=e \tag{24}$$

有解当且仅当

$$gg^{(1)}(1-cc^{(1)})eb^{(1)}b=(1-cc^{(1)})e$$

及

$$aa^{(1)}e(1-d^{(1)}d)h^{(1)}h=e(1-d^{(1)}d),$$

其中 $g=(1-cc^{(1)})a$ 及 $h=b(1-d^{(1)}d)$. 有解时，其通解为

$$x=\eta-g^{(1)}g\eta bb^{(1)}-a^{(1)}a(1-g^{(1)}g)\eta hh^{(1)}+a^{(1)}e(1-d^{(1)}d)h^{(1)}$$
$$+g^{(1)}g[g^{(1)}(1-cc^{(1)})eb^{(1)}-a^{(1)}e(1-d^{(1)}d)h^{(1)}]bb^{(1)},$$
$$y=\mu+c^{(1)}(e-axb)d^{(1)}-c^{(1)}c\mu dd^{(1)},$$

其中，$\eta,\mu\in R$ 是任意的.

推论3 R 上的方程

$$ax+yd=e$$

有解 $x,y\in R$ 当且仅当

$$(1-aa^{(1)})e(1-d^{(1)}d)=0.$$

有解时，其一般解为

$$x=\eta+a^{(1)}(e-a\eta)(1-d^{(1)}d)$$
$$y=\mu(1-dd^{(1)})+(e-a\eta)d^{(1)}dd^{(1)}$$

其中，$\eta,\mu\in R$ 是任意的.

3 (1)在单 Artiniain 环上可解的一个充要条件

我们在本章§6中，将 Roth 的等价定理推广到了单 Artinian 环 R 上. 本段将在 R 上扩展 Roth 的等价定理，给出 R 上矩阵方程(1)有解的一个充要条件.

定理3 考虑单 Artinian 环 R 上的矩阵方程(1)，其中 $A\in R^{m\times n}$，$B\in R^{p\times q}$，$C\in R^{m\times r}$，$D\in R^{l\times q}$及 $E\in R^{m\times q}$，则(1)相容的充要条件为下列关系成立：

$$\operatorname{rank}(A,C,E)=\operatorname{rank}(A,C,O), \tag{25}$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}E\\D\\B\end{pmatrix}=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}O\\D\\B\end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & E \\ O & D \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & D \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} C & E \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} C & O \\ O & B \end{pmatrix}. \tag{28}$$

证明 矩阵方程(1)可改写为

$$(A,C)\begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = E. \tag{29}$$

若(1)有解 X 与 Y,则(29)有解. 故由本章 § 3定理4立知(25)和(26)成立. 又由 R 上的 Roth 等价定理知,若(1)关于 X,Y 有解,则(27)和(28)成立.

下证充分性. 若(25)~(28)成立,利用体上的矩阵论,则有体 Ω 上的可逆矩阵 U_Ω 和 V_Ω 使

$$U_\Omega(A_\Omega,C_\Omega) = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ sm-r_1 \end{matrix}, \tag{30}$$

$$\begin{pmatrix} D_\Omega \\ B_\Omega \end{pmatrix} V_\Omega = \overset{\begin{matrix} r_2 & sq-r_2 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} D_1 & O \\ B_1 & O \end{pmatrix}}, \tag{31}$$

其中,(A_1,C_1)是行满秩,$\begin{pmatrix} D_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$是列满秩. 由(25)及(26)知,

$$(A_\Omega,C_\Omega)X = E_\Omega \tag{32}$$

及

$$Y\begin{pmatrix} D_\Omega \\ B_\Omega \end{pmatrix} = E_\Omega \tag{33}$$

皆有解. 令

$$U_\Omega E_\Omega V_\Omega = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{pmatrix},$$

则由(32)和(33)有解即可推得

$$U_\Omega E_\Omega V_\Omega = \begin{pmatrix} E_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ sm-r_1 \end{matrix}.$$

下面考虑矩阵方程(1)的 Ω 表示方程

$$A_\Omega XB_\Omega+C_\Omega YD_\Omega=E_\Omega. \tag{34}$$

显然,(1)在 R 上可解当且仅当(34)在 Ω 上可解.(34)等价于下面的矩阵方程

$$U_\Omega A_\Omega XB_\Omega V_\Omega+U_\Omega C_\Omega YD_\Omega V_\Omega=U_\Omega E_\Omega V_\Omega,$$

或

$$A_1XB_1+C_1YD_1=E_1. \tag{35}$$

由(27)及(28)式知,

$$AX+YD=E, \tag{36}$$

$$XB+CY=E \tag{37}$$

在 R 上皆有解.同样,我们有

$$A_1X_1+Y_1D_1=E_1, \tag{38}$$

$$X_2B_1+C_1Y_2=E_1 \tag{39}$$

在 Ω 上可解.

因 (A_1,C_1) 是行满秩的,$\begin{pmatrix}D_1\\B_1\end{pmatrix}$ 是列满秩的,故有 Ω 上的矩阵 (A_2,C_2) 和 $\begin{pmatrix}B_2\\-D_2\end{pmatrix}$ 分别使

$$\begin{pmatrix}A_1 & C_1\\A_2 & C_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}B_2 & D_1\\-D_2 & B_1\end{pmatrix}$$

均可逆,并且

$$\begin{pmatrix}B_2 & D_1\\D_2 & -B_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & O\\O & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_2 & D_1\\-D_2 & B_1\end{pmatrix}$$

可逆.设

$$\begin{pmatrix}A_1 & C_1\\A_2 & C_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M_1 & M_2\\M_3 & M_4\end{pmatrix}=I, \tag{40}$$

$$\begin{pmatrix} B_2 & D_1 \\ D_2 & -B_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & -N_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & -N_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_2 & D_1 \\ D_2 & -B_1 \end{pmatrix}=I. \quad (41)$$

设 X_1 与 Y_1 是(38)的解，并且 X_2, Y_2 是(39)的解.

令

$$\begin{aligned} X &= X_1N_4 + M_1(Y_1B_2 + X_2D_2)N_2, \\ Y &= Y_2N_3 + M_3(Y_1B_2 + X_2D_2)N_1. \end{aligned} \quad (42)$$

由(38)，(39)，(40)及(41)，易验知，(42)是(34)的解. 从而(1)在 R 上可解. □

4 主理想环(未必交换)上的矩阵方程(1)

设 R 是一个主理想环(未必可换)，由文〔96〕知，R 有商体. 设 Ω 是 R 所嵌入的商除环. 在第一章 § 2中，我们曾引入了 R 上矩阵 A 的秩 $\mathrm{Rank}A$，并且规定，当 $A=O$ 时，$\mathrm{Rank}A=0$. 设 $A\in\Omega^{m\times n}$，我们记 A 的秩为 $\mathrm{rank}A$.

本段我们在 R 上考虑矩阵方程(1)，给出其有解的充要条件.

由〔96〕中的定理16及其证明知

引理1 设 $A\in R_r^{m\times n}$，则 A 可经过有限次初等变换化为

$$\begin{pmatrix} D_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

的形式，即有 $P\in GL_m(R), Q\in GL_m(R)$ 使

$$PAQ=\begin{pmatrix} D_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中，$D_r=\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_r)\in R^{r\times r}, a_i | a_j, 1\leqslant i\leqslant j\leqslant r$.

引理2 设 $A\in R^{m\times n}$，则

$$\mathrm{Rank}A=\mathrm{rank}A$$

证明 若 $A=O$，则引理的正确性是显然的. 设 $\mathrm{rank}A=r>0$，则 A 有一个 r 阶子块 A_r 非零因子. 于是，由引理1易知有 $P, Q\in$

$GL_r(R)$使

$$A_r=PD_rQ, D_r=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_r),$$

其中 a_i 全不为零. 因此,在 R 所嵌入的商除环 Ω 上,A_r 可逆,从而有 $\mathrm{rank}A\geqslant r$. 故

$$\mathrm{Rank}A\leqslant\mathrm{rank}A.$$

设 $\mathrm{rank}A=t$,则 A 有一个 t 阶子块 A_t 在 Ω 上可逆. 在 R 上,设 $A_tX=O, X\in R^{t\times s}$,则由 $A_t\in GL_t(R)$知,在 Ω 上有

$$X=A_t^{-1}A_tX=O.$$

类似可证,在 R 上,若 $YA_t=O$,则 $Y=O$. 故 A_t 在 R 上非零因子. 于是

$$\mathrm{Rank}A\geqslant t=\mathrm{rank}A.$$

故

$$\mathrm{Rank}A=\mathrm{rank}A. \qquad \square$$

由引理2立知,关于体上矩阵秩的等式与不等式(如第一章§2中的定理8、定理9等)均在 R 上成立.

此外,体上矩阵的满秩分解在 R 上亦成立.

由引理1还可易证得下面的

引理3 设 $A\in R_r^{m\times n}$,则一定有 $P\in GL_m(R)$和 $Q\in GL_n(R)$使

$$PA=\begin{pmatrix}A_1\\O\end{pmatrix},$$

$$AQ=(A_2,O),$$

其中 $A_1\in R_r^{r\times n}, A_2\in R_r^{m\times r}$.

设 $A\in R^{a\times k}, D\in R^{n\times b}$及 $E\in R^{a\times b}$,则矩阵方程

$$AX+YD=E \tag{43}$$

有解的一个充要条件是 Roth 的等价条件成立,其证明可类似于本章§6的处理. 即下面的

引理4 矩阵方程(43)在 R 上可解的充要条件是

$$\begin{pmatrix}A & E\\O & D\end{pmatrix}与\begin{pmatrix}A & O\\O & D\end{pmatrix}$$

在 R 上等价.

引理5 矩阵方程(43)有解当且仅当

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & I \end{pmatrix}\hat{X}+\hat{Y}\begin{pmatrix} I & E \\ O & D \end{pmatrix}=I \tag{44}$$

可解,或等价于,当且仅当

$$\begin{pmatrix} A & E \\ O & I \end{pmatrix}\widetilde{X}+\widetilde{Y}\begin{pmatrix} I & O \\ O & D \end{pmatrix}=I \tag{45}$$

可解.

证明 设(X,Y)是(43)的一个解,令

$$\hat{Y}=\begin{pmatrix} I & -Y \\ O & O \end{pmatrix},\hat{X}=\begin{pmatrix} O & -X \\ O & I \end{pmatrix},$$

易验知它们满足(44).

反之,给定(44)的一个解$(\hat{X},\hat{Y})$,将 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 作相容分块并令

$$X=-\hat{X}_{12}-\hat{X}_{11}E,Y=-\hat{Y}_{12},$$

则 X,Y 满足(43).

只要作方程的可逆变换即可有(44)⇔(45). □

下面考虑矩阵方程(1),其中 $A\in R^{a\times k},B\in R^{l\times b},C\in R^{a\times m},D\in R^{m\times b}$及 $E\in R^{a\times b}$.(1)可改写为

$$(A,C)\begin{pmatrix} X & O \\ O & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}=E. \tag{46}$$

由引理3,有 R 上的可逆阵 U 和 V 使

$$U(A,C)=\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{C} \\ O & O \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}V=\begin{pmatrix} \hat{B} & O \\ \hat{D} & O \end{pmatrix},$$

其中$(\hat{A},\hat{C})$行满秩,$\begin{pmatrix} \hat{B} \\ \hat{D} \end{pmatrix}$是列满秩.令

$$UEV=\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix},$$

其中 E_{11} 是 $\operatorname{rank}(A,C)\times\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}$ 矩阵. 作 $(\hat{A},\hat{C})$ 及 $\begin{pmatrix}\hat{B}\\\hat{D}\end{pmatrix}$ 的满秩分解如下:

$$(\hat{A},\hat{C})=L(A^{\triangle},C^{\triangle}),$$

$$\begin{pmatrix}\hat{B}\\\hat{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{\triangle}\\D^{\triangle}\end{pmatrix}R,$$

其中 $(A^{\triangle},C^{\triangle})$ 是左可逆, $\begin{pmatrix}B^{\triangle}\\D^{\triangle}\end{pmatrix}$ 是右可逆.

令

$$\hat{E}=L^{-1}E_{11}R^{-1}.$$

于是由(46)式及本章§3定理5立得下面的

命题1 矩阵方程(1)有解当且仅当下面3个条件都成立:

(i) $E_{12}=0, E_{21}=O, E_{22}=O$.

(ii) $\hat{E}$ 是 R 上的矩阵.

(iii) 矩阵方程

$$A^{\triangle}XB^{\triangle}+C^{\triangle}YD^{\triangle}=E^{\triangle} \tag{47}$$

在 R 上有解.

进而, 若(i)与(ii)成立, 则(1)与(47)同解.

由命题1, 不失一般性可令(1)中的

$$(A,C)\text{是左可逆的}, \tag{48}$$

$$\begin{pmatrix}B\\D\end{pmatrix}\text{是右可逆的}. \tag{49}$$

于是, 存在 R 上的矩阵 $\overline{M},\overline{N},\overline{L},\overline{K}$ 使

$$\begin{pmatrix}A & C\\\overline{N} & -M\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{K} & D\\\overline{L} & -B\end{pmatrix}$$

是可逆矩阵. 故有

$$\begin{pmatrix}A & C\\\overline{N} & -\overline{M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M & \overline{C}\\N & -\overline{A}\end{pmatrix}=I,$$

$$\begin{pmatrix} \overline{B} & \overline{D} \\ L & -K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{K} & D \\ \overline{L} & -B \end{pmatrix}=I. \tag{50}$$

下面给出(1)可解的充要条件.

定理4 设(48)和(49)成立,则以下条件等价:

(i) (1)可解.

(ii) 矩阵方程

$$A\overline{C}\overline{X}+\overline{Y}\ \overline{D}B=EKB-AME \tag{51}$$

可解.

(iii) 矩阵方程

$$AX_1+Y_1D=E,X_2B+CY_2=E \tag{52}$$

皆可解.

(iv)
$$\begin{bmatrix} C & E & O & O \\ O & B & O & O \\ O & O & A & E \\ O & O & O & D \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} C & O & O & O \\ O & B & O & O \\ O & O & A & O \\ O & O & O & D \end{bmatrix}.$$

(v) 矩阵方程

$$\begin{pmatrix} C & O \\ O & A \end{pmatrix}\hat{X}+\hat{Y}\begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix} \tag{53}$$

有解.

证明 我们将证明(iii)⇒(i)⇒(ii)⇒(iv)⇒(v)⇒(iii).

(iii)⇒(i) 设 X_1,Y_1,X_2,Y_2满足(52),令

$$X=X_1K+M(Y_1\overline{K}+X_2\overline{L})\overline{D},$$
$$Y=Y_2L+N(Y_1\overline{K}+X_2\overline{L})\overline{B},$$

由(50)可直接验证(X,Y)是(1)的解.

(i)⇒(ii) 给定 X 和 Y 满足(1),令

$$\overline{X}=\overline{N}(XB-ME)-\overline{M}(YD-NE),$$
$$\overline{Y}=(CY-EL)\overline{K}-(AX-EK)\overline{L},$$

由(50),可验知 $\overline{X}$ 与 $\overline{Y}$ 满足(51).

(ii)⇒(iv)　若(51)在 R 上可解，则由引理4知，

$$\begin{pmatrix} A\overline{C} & EKB-AME \\ O & \overline{D}B \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} A\overline{C} & O \\ O & \overline{D}B \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} A\overline{C} & EKB-AME & O & O \\ O & \overline{D}B & O & O \\ O & O & I_a & O \\ O & O & O & I_b \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} A\overline{C} & O & O & O \\ O & \overline{D}B & O & O \\ O & O & I_a & O \\ O & O & O & I_b \end{pmatrix}.$$

通过简单的可逆变换并由(10)即得

$$\begin{pmatrix} A\overline{C} & EKB-AME & O & O \\ O & \overline{D}B & O & O \\ O & O & I_a & O \\ O & O & O & I_b \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} C & E & O & O \\ O & D & O & O \\ O & O & A & E \\ O & O & O & D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A\overline{C} & O & O & O \\ O & \overline{D}B & O & O \\ O & O & I_a & O \\ O & O & O & I_b \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} C & O & O & O \\ O & B & O & O \\ O & O & A & O \\ O & O & O & D \end{pmatrix},$$

故(iv)成立.

(iv)⇒(v)　对

$$\begin{pmatrix} C & E & O & O \\ O & B & O & O \\ O & O & A & E \\ O & O & O & D \end{pmatrix}$$

作一系列初等行和列的变换即得

$$\begin{pmatrix} C & E & O & O \\ O & B & O & O \\ O & O & A & E \\ O & O & O & D \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} C & O & E & O \\ O & A & O & E \\ O & O & B & O \\ O & O & O & D \end{pmatrix}.$$

同理，

$$\begin{pmatrix} C & O & O & O \\ O & B & O & O \\ O & O & A & O \\ O & O & O & D \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} C & O & O & O \\ O & A & O & O \\ O & O & B & O \\ O & O & O & D \end{pmatrix}.$$

从而，

$$\begin{pmatrix} C & O & E & O \\ O & A & O & E \\ O & O & B & O \\ O & O & O & D \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} C & O & O & O \\ O & A & O & O \\ O & O & B & O \\ O & O & O & D \end{pmatrix}.$$

于是，由引理4即得(v).

(v)⇒(iii) 只要对(13)中的矩阵 $\hat{X}, \hat{Y}$ 作相容分块，即得(iii). □

最后我们揭示矩阵方程(1)的解集与(52)的解集的关系.

令 $\varphi = \{(X,Y) \mid AXB + CYD = E\}$,

$\varphi_{12} = \{(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \mid AX_1 + Y_1 D = E, X_2 B + CY_2 = E\}$,

它们分别是(1)和(52)的解集. 对 φ，定义等价关系如下

$$(X,Y) \cong (\overline{X}, \overline{Y})$$

当且仅当对 R 上的矩阵 Θ，有

$$\overline{X} = X + \overline{C}\Theta\overline{D}, \overline{Y} = Y - \overline{A}\Theta\overline{B} \tag{54}$$

其中 $\overline{C}, \overline{D}, \overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 是(50)中的矩阵. 同理，对 φ_{12}，我们定义如下的等价关系：

$$(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \cong (\overline{X}_1, \overline{Y}_1, \overline{X}_2, \overline{Y}_2)$$

当且仅当对 R 上的矩阵 θ_1 与 θ_2 有

$$\begin{cases} \overline{X}_1 = X_1 + \theta_1 D, \\ \overline{Y}_1 = Y_1 - A\theta_1, \\ \overline{X}_2 = X_2 + C\theta_2, \\ \overline{Y}_{21} = Y_{21} - \theta_2 B. \end{cases} \tag{55}$$

令 $[\varphi] = \{[X, Y]\}$ 及 $[\varphi] = \{[X_1, Y_1, X_2, Y_2]\}$ 表示由这些等价关系

导出的等价类.

定理5 映射 $\psi:[\varphi_{12}]\to[\varphi]$.

$$[X_1,Y_1,X_2,Y_2]\to[X_1K+M(Y_1\overline{K}+X_2\overline{L})\overline{D},Y_2L+N(Y_1\overline{K}+X_2\overline{L})\overline{B}]$$

是一个双射.

证明 若$(\overline{X}_1,\overline{Y}_1,\overline{X}_2,\overline{Y}_2)\in[X_1,Y_1,X_2,Y_2]$,则有 R 上的矩阵 Θ_1和 Θ_2使(55)成立.定义

$$\Theta=\overline{N}\Theta_1\overline{K}+\overline{M}\Theta_2\overline{L},$$

由(50)易验知,

$$\overline{X}_1K+M(\overline{Y}_1\overline{K}+\overline{X}_2\overline{L})\overline{D}=X_1K+M(Y_1\overline{K}+X_2\overline{L})\overline{D}+\overline{C}\Theta\overline{D},$$

$$\overline{Y}_2L+N(\overline{Y}_1\overline{K}+\overline{X}_2\overline{L})\overline{B}=Y_2L+N(Y_1\overline{K}+X_2\overline{L})\overline{B}-\overline{A}\Theta\overline{B}.$$

故

$$\psi([\overline{X}_1,\overline{Y}_1,\overline{X}_2,\overline{Y}_2])=\psi([X_1,Y_1,X_2,Y_2]).$$

从而 ψ 是映射.给定$[X,Y]\in[\varphi]$,考虑

$$X_1=XB,Y_1=CY,X_2=AX,Y_2=YD,$$

则由(50)易计算知

$$\psi([X_1,Y_1,X_2,Y_2])=[X+\overline{C}\Theta\overline{D},Y-\overline{A}\Theta\overline{B}],$$

$$\Theta=\overline{M}Y\overline{K}-\overline{N}X\overline{L}.$$

所以,

$$\psi([X_1,Y_1,X_2,Y_2])=[X,Y].$$

即 ψ 是满射.

下证 ψ 是单射:设

$$\psi([X_1,Y_1,X_2,Y_2])=[X,Y],$$

$$\psi([\overline{X}_1,\overline{Y}_1,\overline{X}_2,\overline{Y}_2])=[\overline{X},\overline{Y}],$$

及

$$[X,Y]=[\overline{X},\overline{Y}],$$

则有 R 上的矩阵 Θ 满足

$$\overline{X}=\overline{X}_1K+M(\overline{Y}_1\overline{K}+\overline{X}_2\overline{L})\overline{D}=X+\overline{C}\Theta\overline{D}$$
$$=X_1K+M(Y_1\overline{K}+X_2\overline{L})\overline{D}+\overline{C}\Theta\overline{D},$$

$$\overline{Y} = \overline{Y}_2 L + N(\overline{Y}_1 \overline{K} + \overline{X}_2 \overline{L})\overline{B} = Y - \overline{A}\Theta\overline{B}$$
$$= Y_2 L + N(Y_1 \overline{K} + X_2 \overline{L})\overline{B} - \overline{A}\Theta\overline{B}.$$

令
$$\Theta_1 = \overline{C}\Theta\overline{B} - MZ\overline{B} + (\overline{X}_1 - X_1)L,$$
$$\Theta_2 = \overline{A}\Theta\overline{D} + NZ\overline{D} - (\overline{Y}_2 - Y_2)K,$$

其中
$$Z = (\overline{Y}_1 - Y_1)\overline{K} + (\overline{X}_2 - X_2)L.$$

由(50)及 $AX_1 + Y_1 D = E, X_2 B + CY_2 = E, A\overline{X}_1 + \overline{Y}_1 D = E, \overline{X}_2 B + C\overline{Y}_2 = E$,可验知(55)成立. 故
$$(\overline{X}_1, \overline{Y}_1, \overline{X}_2, \overline{Y}_2) \in [X_1, Y_1, X_2, Y_2].$$

于是 ψ 是单射. □

§14 矩阵方程 $AXA^* + BYB^* = C$

本节研究矩阵方程
$$AXA^* + BYB^* = C, \tag{1}$$
给出(1)在具有对合反自同构的体 K 上有(次)自共轭解的充要条件及其解集结构,在实数域上给出(1)有极小范数对称解的充要条件及其解集结构.

1 (1)在 K 上的(次)自共轭解

考虑矩阵方程(1),其中 $A \in K_r^{m\times n}, B \in K_{r_0}^{m\times k}, C \in K^{m\times m}$.

定理1 设(1)中矩阵对$[A, B]$的 DSR 分解为

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, PBQ = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r_1 & r_2 & k-r_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} O & I_{r_2} & O \\ O & O & O \\ I_{r_1} & O & O \\ O & O & O \end{array}\right) \begin{array}{l} r_2 \\ r-r_2 \\ r_1 \\ m-r-r_1 \end{array} \end{array} \tag{2}$$

其中, $r_0 = r_1 + r_2, P \in GL_m(K), Q \in GL_n(K), Q_0 \in GL_k(K), C^* = C$,且

$$PCP^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_2 & r-r_2 & r_1 & m-r-r_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{12}^* & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{13}^* & C_{23}^* & C_{33} & C_{34} \\ C_{14}^* & C_{24}^* & C_{34}^* & C_{44} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} r_2 \\ r-r_2 \\ r_1 \\ m-r-r_1 \end{matrix}, \tag{3}$$

则(1)有自共轭解的充要条件为 $C_{23}=O, C_{i4}=O(i=1,2,3,4)$. 有此种解时,其一般解为

$$X=Q\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}-Y_{22} & C_{12} \\ C_{12}^* & C_{22} \end{pmatrix} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix}Q^*, \tag{4}$$

$$Y=Q_0\begin{pmatrix} C_{33} & C_{13}^* & Y_{13} \\ C_{13} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{13}^* & Y_{23}^* & Y_{33} \end{pmatrix}Q_0^*, \tag{5}$$

其中 $X_{12}\in K^{r\times(n-r)}, X_{22}\in SC_{n-r}(K), Y_{13}\in K^{r_1\times(k-r_0)}, Y_{22}\in SC_{r_2}(K), Y_{23}\in K^{r_2\times(k-r_0)}, Y_{33}\in SC_{k-r_0}(K)$是任意的.

证明 矩阵方程(1)有自共轭解等价于

$$\begin{cases} PAQQ^{-1}XQ^{-*}Q^*A^*P^*+PBQ_0Q_0^{-1}YQ_0^{-*}Q_0^*B^*P^*=PCP^*, \\ X^*=X, \\ Y^*=Y \end{cases} \tag{6}$$

相容. 令

$$Q^{-1}XQ^{-*}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix} \end{array}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}, \tag{7}$$

$$Q_0^{-1}YQ_0^{-*}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r_1 & r_2 & k-r_0 \end{array} \\ \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{12}^* & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{13}^* & Y_{23}^* & Y_{33} \end{pmatrix} \end{array}\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ k-r_0 \end{matrix}, \tag{8}$$

将(2),(3),(7),(8)代入(6),得

$$\begin{pmatrix} X_{11}+\begin{pmatrix} Y_{22} & O \\ O & O \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Y_{12}^* & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Y_{12} & O \\ O & O \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Y_{11} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{12}^* & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{13}^* & C_{23}^* & C_{33} & C_{34} \\ C_{14}^* & C_{24}^* & C_{34}^* & C_{44} \end{pmatrix}.$$

故

$Y_{12}=C_{13}^*, Y_{11}=C_{33}, C_{i4}=O, (i=1,2,3,4), C_{23}=O,$

$$X_{11}=\begin{pmatrix} C_{11}-Y_{22} & C_{12} \\ C_{12}^* & C_{22} \end{pmatrix}.$$

所以(1)有自共轭解,必有 $C_{23}=O$,及 $C_{i4}=O \quad (i=1,2,3,4)$ 且其解可表成(4)与(5)的形式.

反之,若 $C_{23}=O$ 及 $C_{i4}=O(i=1,2,3,4)$,将(4)及(5)代入(1)并注意到 $C^*=C$ 及(3)式立知(4)与(5)是(1)之自共轭解. □

同理可给出矩阵方程(1)有反自共轭解的充要条件及其通解表达式.

定理1 设(1)中矩阵对〔A,B〕的 DSR 分解为(2)式,$C^*=-C$,且

$$PCP^*=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} r_2 & r-r_2 & r_1 & m-r-r_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ -C_{12}^* & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ -C_{13}^* & -C_{23}^* & C_{33} & C_{34} \\ -C_{14}^* & -C_{24}^* & -C_{34}^* & C_{44} \end{pmatrix} \end{array}\begin{matrix} r_2 \\ r-r_2 \\ r_1 \\ m-r-r_1 \end{matrix},$$

则(1)有反自共轭解的充要条件为 $C_{23}=O, C_{i4}=O(i=1,2,3,4)$.

有此种解时，其一般解为

$$X=Q\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}C_{11}-Y_{22} & C_{12}\\ -C_{12}^{*} & C_{22}\end{pmatrix} & X_{12}\\ -X_{12}^{*} & X_{22}\end{pmatrix}Q^{*},$$

$$Y=Q_0\begin{pmatrix}C_{33} & -C_{13}^{*} & Y_{13}\\ C_{13} & Y_{22} & Y_{23}\\ -Y_{13}^{*} & -Y_{23}^{*} & Y_{33}\end{pmatrix}Q_0^{*},$$

其中 $X_{12}\in K^{r\times(n-r)}$，$X_{22}\in SS_{n-r}(K)$，$Y_{13}\in K^{r_1\times(k-r_0)}$，$Y_{22}\in SS_{r_2}(K)$，$Y_{23}\in K^{r_2\times(k-r_0)}$，$Y_{33}\in SS_{k-r_0}(K)$是任意的.

类似于定理1，我们给出的矩阵方程(1)有次自共轭解的充要条件及其通解表达式.

定理3 设矩阵方程(1)中矩阵对$[A,B]$的 DSR 分解为(2)式，$C=C^{(*)}$，且

$$PCP^{(*)}=\begin{array}{c} \begin{matrix} m-r-r_1 & r_1 & r-r_2 & r_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{13}^{(*)}\\ C_{31} & C_{32} & C_{11}^{(*)} & C_{12}^{(*)}\\ C_{41} & C_{31}^{(*)} & C_{21}^{(*)} & C_{22}^{(*)}\end{pmatrix}\begin{matrix} r_2\\ r-r_2\\ r_1\\ m-r-r_1\end{matrix}\end{array},$$

则(1)有次自共轭解当且仅当 $C_{22}=O$，$C_{i1}=O$，$i=1,2,3,4$. 有此种解时，其通解为

$$X=Q\begin{pmatrix}X_{11} & \begin{pmatrix}C_{13} & C_{14}-Y_{22}\\ C_{23} & C_{13}^{(*)}\end{pmatrix}\\ X_{21} & X_{11}^{(*)}\end{pmatrix}Q^{(*)},$$

$$Y=Q_0\begin{pmatrix}Y_{11} & C_{12}^{(*)} & C_{32}\\ Y_{21} & Y_{22} & C_{12}\\ Y_{31} & Y_{21}^{(*)} & Y_{11}^{(*)}\end{pmatrix}Q_0^{*},$$

其中 $X_{11}\in K^{r\times(k-r)}$，$X_{21}\in H_{k-r}(K)$，$Y_{11}\in K^{r_1\times(k-r_0)}$，$Y_{21}\in K^{r_2\times(k-r_0)}$，$Y_{22}\in H_{r_2}(K)$，$Y_{31}\in H_{k-r_0}(K)$是任意的.

同理有下面的

定理4 设矩阵方程(1)中矩阵对$[A,B]$的 DSR 分解为(2)式,$C=-C^{(*)}$,且

$$PCP^{(*)}=\begin{array}{l} \begin{matrix} m-r-r_1 & r_1 & r-r_2 & r_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & -C_{13}^{(*)} \\ C_{31} & C_{32} & -C_{11}^{(*)} & -C_{12}^{(*)} \\ C_{41} & -C_{31}^{(*)} & -C_{21}^{(*)} & -C_{22}^{(*)} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_2 \\ r-r_2 \\ r_1 \\ m-r-r_1 \end{matrix} \end{array}$$

则(1)有次反自共轭解当且仅当 $C_{22}=O,C_{i1}=O,i=1,2,3,4$. 有此种解时,其通解为

$$X=Q\begin{pmatrix} X_{11} & \begin{pmatrix} C_{13} & C_{14}-Y_{22} \\ C_{23} & -C_{13}^{(*)} \end{pmatrix} \\ X_{21} & -X^{(*)}{}_{11} \end{pmatrix}Q^{(*)},$$

$$Y=Q_0\begin{pmatrix} Y_{11} & -C_{12}^{*} & C_{32} \\ Y_{21} & Y_{22} & C_{12} \\ Y_{31} & -Y_{21}^{(*)} & -Y_{11}^{(*)} \end{pmatrix}Q_0^{(*)},$$

其中 $X_{11}\in K^{r\times(k-r)},X_{21}\in S_{k-r}(K),Y_{11}\in K^{r_1\times(k-r_0)}$,
$Y_{21}\in K^{r_2\times(k-r_0)},Y_{22}\in S_{r_2}(K),Y_{31}\in S_{k-r_0}(K)$是任意的.

2 实矩阵方程 $AXA'+BYB'=C$ 的极小范数对称解

本段考虑矩阵方程方程

$$AXA'+BYB'=C \tag{9}$$

的极小范数对称解. 其中,$A\in R^{m\times n},B\in R^{m\times p},C\in R^{m\times m}$,这里 R 是实数域.

对于上述的 A,B,C,令

$$L=\{[X,Y]\mid X\in SC_n(R),Y\in SC_p(R),AXA'+BYB'=C\}, \tag{10}$$

则求(9)的极小范数对称解等价于$[X,Y]\in L$ 使

$$\|[X,Y]\|=\min \tag{11}$$

对于(9)中的 $A,B,[A,B]$的广义奇异值分解(GSVD)为

$$A=M\Sigma_A U',B=M\Sigma_B V' \tag{12}$$

其中 $M\in GL_m(R)$，U 与 V 分别为 n 阶和 p 阶正交阵，且

$$\Sigma_A=\begin{pmatrix} I_A & & \\ & S_A & \\ & & O_A \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & O & \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ s \\ k-r-s \\ \\ m-k \end{matrix}, \tag{13}$$

$$\Sigma_B=\begin{pmatrix} O_B & & \\ & S_B & \\ & & I_B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & O & \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ s \\ k-r-s \\ \\ m-k \end{matrix} \tag{14}$$

$k=\text{rank}C_1=\text{rank}(A,B)$，$r=k-\text{rank}B$，$s=\text{rank}A+\text{rank}B-k$，$S_A=\text{diag}(\alpha_1,\cdots\alpha_s)$，$S_B=\text{diag}(\beta_1,\cdots\beta_s)$，$1>\alpha_1\geqslant\cdots\geqslant\alpha_s>0$，$0<\beta_1\leqslant\cdots\leqslant\beta_s<1$，$\alpha_i^2+\beta_i^2=1$，$i=1,\cdots,s$.

另外，$A*B$ 表示 $A\in R^{n\times n}$和 $B\in R^{n\times n}$的 Hardmard 积，即 $A*B=(a_{ij}b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$，$A=(a_{ij})_n$，$B=(b_{ij})_n$.

引理1 设 $G\in R^{r\times r}$，$H\in R^{r\times r}$，$\Lambda=\text{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r)>0$，$T=\text{diag}(\gamma_1\cdots,\gamma_r)>0$，则有唯一的 $S\in SC_r(R)$使

$$\|\Lambda S\Lambda-G\|^2+\|T\,ST-H\|^2=\min_{S\in SC_r(R)}(\|\Lambda S\Lambda-G\|^2+\|T\,ST-H\|^2), \tag{15}$$

且S可表为

$$S=\frac{1}{2}\Phi*(\Lambda(G+G')\Lambda+(H+H')T) \tag{16}$$

其中

$$\Phi=(\varphi_{ij})\in R^{r\times r},\varphi_{ij}=\frac{1}{\lambda_j^2\lambda_j^2+\gamma_i^2\gamma_j^2}. \tag{17}$$

证明 对于 $S=(s_{ij})\in SC_r(R)$，$G=(g_{ij})\in R^{r\times r}$，$H=(h_{ij})\in$

$R^{r\times r}$，有

$$\|\Lambda S\Lambda-G\|^2+\|TST-H\|^2$$
$$=\sum_{1\leq i\leq r}[(\lambda_i^4+\gamma_i^4)s_{ii}^2-2(\lambda_i^2 g_{ii}+\lambda_i^2 h_{ii})s_{ii}+g_{ii}+h_{ii}^2]$$
$$+\sum_{1\leq i<j\leq r}\{2(\lambda_i^2\lambda_j^2+\gamma_i^2\gamma_j^2)s_{ii}^2-2[\lambda_i\lambda_j(g_{ji}+g_{ji})+\gamma_i\gamma_i(h_{ij})$$
$$+h_{ji})]s_{ij}+g_{ji}+g_{ij}^2+h_{ij}^2+h_{ji}^2\}. \tag{18}$$

由(18)易得(15)中的唯一解 $S=(s_{ij})\in SC_r(R)$，其中

$$s_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\lambda_i(g_{ij}+g_{ji})\lambda_j+\gamma_i(h_{ij}+h_{ji})\gamma_j}{\lambda_j^2\lambda_j^2+\gamma_i^2\gamma_j^2},1\leq i,j\leq r \tag{19}$$

故(16)式得证.

定理5 设(9)中矩阵对[A,B]的 GSVD 为(12)，令

$$M^{-1}C(M^{-1})'=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ s \\ k-r-s \\ m-k \end{matrix}, \tag{20}$$

（列分块依次为 r，s，$k-r-s$，$m-k$）

则 $L\neq\varnothing$（见(10)）的充要条件为

$$C=C',C_{13}=O,C_{i4}=O(i=1,2,3,4) \tag{21}$$

当 $L\neq\varnothing$ 时，L 可表示为下面的形式：

$$L=\left\{\left[U\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}S_A^{-1} & X_{13} \\ S_A^{-1}C'_{12} & S_A^{-1}(C_{22}-S_BY_{22}S_B)S_A^{-1} & X_{23} \\ X'_{13} & X'_{23} & X_{33} \end{pmatrix}U',\right.\right.$$

$$\left.V\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y'_{12} & Y_{22} & S_B^{-1}C_{23} \\ Y'_{13} & C'_{23}S_B^{-1} & C_{33} \end{pmatrix}V'\right],X_{13}\in R^{r\times(n-r-s)},$$

$X_{23}\in R^{s\times(n-r-s)}$，$X_{33}\in SC_{n-r-s}(R)$，$Y_{11}\in SC_{p+r-k}(R)$，$Y_{12}\in R^{(p+r-k)\times s}$，$Y_{13}\in R^{(p+r-k)\times(k-r-s)}$，

$Y_{22}\in SC_s(R)\}$.　(22)

在 L 中存在唯一的$[\dot{X},\dot{Y}]$ 使(11)成立,并且 $\dot{X},\dot{Y}$可表为

$$\dot{X}=U\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}^{-1}S_A & O \\ S_A^{-1}C_{12}' & \Phi*(S_AC_{22}S_A) & O \\ O & O & O \end{pmatrix}U'$$

$$\dot{Y}=V\begin{pmatrix} O & O & O \\ O & \Phi*(S_BC_{22}S_B & S_{23}^{-1}C_{23} \\ O & C_{23}'S_B' & C_{33} \end{pmatrix}V' \tag{23}$$

其中

$$\Phi=(\varphi_{ij})\in R^{s\times s},\varphi_{ij}=\frac{1}{\alpha_i^2\alpha_j^2+\beta_i^2\beta_j^2}. \tag{24}$$

证明　L 非空,显然,C 必是对称阵.对$[X,Y]\in L$,利用(12),我们有

$$M\Sigma_AU'XU\Sigma_A'M'+M\sum{}_BV'YV\sum{}'_BM'=C \tag{26}$$

记

$$U'XU=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{12}' & X_{22}' & X_{23} \\ X_{13}' & X_{23}' & X_{33}' \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ s \\ n-r-s \end{matrix},\quad (\text{列: } r,\ s,\ n-r-s)$$

$$V'YV=\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{12}' & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{13}' & Y_{23}' & Y_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} p+r-s \\ s \\ k-r-s \end{matrix}. \quad (\text{列: } p+r-k,\ s,\ r-k-s) \tag{27}$$

将(20)及(27)代入(26)得

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12}S_A & O & O \\ S_AX_{12}' & S_AX_{22}S_A+S_BY_{22}S_B & S_BY_{23} & O \\ O & Y_{23}'S_B & Y_{33} & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{13} \\ C_{12}' & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{13}' & C_{23}' & C_{33} & C_{34} \\ C_{14}' & C_{24}' & C_{34}' & C_{44} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

故

$$X_{11}=C_{11}, X_{12}=C_{12}S_A^{-1}, Y_{23}=S_B^{-1}C_{23}, Y_{33}=C_{33}, \tag{29}$$

$$C_{13}=O, C_{i4}=O, (i=1,2,3,4) \tag{30}$$

$$S_AX_{22}S_A+S_BY_{22}S_B=C_{22}. \tag{31}$$

故 L 非空当且仅当(21)成立，且当 L 非空时，L 可表成(22)的形式.

此外，由于 L 是一个闭凸集，故存在唯一的$[X,Y]\in L$ 使(11)成立，同时

$$\begin{aligned}\|[X,Y]\|^2=&\|C_{11}\|^2+\|C_{33}\|^2+2\|C_{12}S_A^{-1}\|^2+2\|X_{13}\|^2\\&+2\|S_B^{-1}C_{23}\|^2+2\|X_{23}\|^2\|X_{33}\|^2+Y_{11}\|^2\\&+2\|Y_{12}\|^2+2\|Y_{13}\|^2\\&+\|S_A^{-1}C_{22}S_A^{-1}-S_A^{-1}S_BY_{22}S_BS_A^{-1}\|^2+\|Y_{22}\|^2.\end{aligned} \tag{32}$$

故

$$X_{ij}=O \quad i=1,2,3, Y_{1i}=O, i=1,2,3 \tag{33}$$

$$\|S_A^{-1}C_{22}S_A^{-1}-S_A^{-1}S_BY_{22}S_BS_A^{-1}\|^2+\|Y_{22}\|^2 \tag{34}$$

最小. 由引理1及(34)得

$$Y_{22}=\Phi*(S_BC_{22}S_B), \tag{35}$$

其中 Φ 由(24)所定义. 故由(29)，(33)及(35)得(23). □

§15 矩阵方程 $AXB-CXD=E$

在本章§6及§7中，我们以大量的篇幅研究了矩阵方程

$$AX-CX=E.$$

在广义特征值问题的摄动研究[99]及隐式常微分方程的数值解中[100]，有一类更广的重要的矩阵方程

$$AXB-CXD=E \tag{1}$$

其中 $A,C\in F^{m\times m},B,D\in F^{n\times n},E\in F^{m\times n}$（$F$ 为实数域或复数域）. 本节利用矩阵的反演研究矩阵方程(1)的唯一解.

下面我们先引入正则矩阵束与奇异矩阵束.

定义1 矩阵束 $A+\lambda B$ 称为正则的，如果 A 与 B 是 n 阶方阵且 $\det(A+\lambda B)$ 不恒为零. 否则，$A+\lambda B$ 称为奇异矩阵束.

注意到矩阵方程(1)等价于

$$(\lambda C-A)XB-CX(\lambda B-D)=-E \tag{2}$$

1 正则矩阵束的情形

考虑矩阵方程(2)，设 $\lambda B-A$ 和 $\lambda B-D$ 分别是 $m\times m$ 和 $n\times n$ 正则矩阵束，则(2)可改写为

$$XB(\lambda B-D)^{-1}-(\lambda C-A)^{-1}CX=-(\lambda C-A)^{-1}E(\lambda B-D)^{-1}, \tag{3}$$

$\lambda\in F$. 矩阵束 $\lambda C-A$ 与 $\lambda B-D$ 说明在零点的空心邻域内存在 Laurent 展式[101]：

$$(\lambda C-A)^{-1}=\lambda^{-1}\sum_{k=-u}^{\infty}U_k\lambda^{-k},U_k\in F^{n\times n}, \tag{4}$$

$$(\lambda B-D)^{-1}=\lambda^{-1}\sum_{k=-t}^{\infty}V_k\lambda^{-k},V_k\in F^{n\times n}. \tag{5}$$

不失一般性，我们可设幂零指数 u,t 满足 $u\geqslant t$，则展式(5)可改写为

$$(\lambda B-D)^{-1}=\lambda^{-1}\sum_{k=-u}^{\infty}V_k\lambda^{-k},V_k\in F^{n\times n}; \tag{6}$$

其中：$V_k=O, -u\leqslant k<-t$. 将(4)及(6)式代入(3)式得

$$\lambda^{-1}\sum_{k=-u}^{\infty}(XBV_k-U_kCX)\lambda^{-k}=\lambda^{-1}\sum_{k=-2u+1}^{\infty}W_k\lambda_{-k} \tag{7}$$

其中

$$W_k=-\sum_{j=-u}^{k+u-1}U_jEV_{k-j-1}, k\geqslant -2u+1.$$

比较(7)式两端的系数得

$$\begin{aligned} &W_k=O, k=-2u+1, -2u+2, \cdots, -u+1, \\ &XBV_k-U_kCX=W_k, k\geqslant -u. \end{aligned} \tag{8}$$

现在考虑 $\lambda C-A$ 的相对特征多项式，

$$\Delta_1(\lambda)=\det(\lambda C-A)=p_m\lambda^m+p_{m-1}\lambda^m+\cdots+p_0.$$

由相对 Cayley—Hamilton 定理[102]，得对 $k\geqslant m$ 或 $k\leqslant -1$，有

$$\Delta_1(U_k)=p_mU_k+p_{m-1}U_{k-1}+\cdots+p_0U_{k-m}=O. \tag{9}$$

由(8)得

$$\begin{aligned} &XBV_0-U_0CX=W_0 \\ &XBV_1-U_1CX=W_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &XBV_m-U_mCX=W_m \end{aligned} \tag{10}$$

用 p_i 去乘(10)中的第 i 个方程，$i=0,1,\cdots,m$，并且将结式相结，我们可验知，

$$XB\Delta_1(V_m)-\Delta_1(U_m)CX=\Delta_1(W_m),$$

其中，

$$\Delta_1(V_m)=p_mV_m+p_{m-1}V_{m-1}+\cdots+p_0V_0, \tag{11}$$

$$\Delta_1(W_m)=p_mW_m+p_{m-1}W_{m-1}+\cdots+p_0W_0. \tag{12}$$

注意到(9)，我们推出如下结论

$$XB\Delta_1(V_m)=\Delta_1(W_m).$$

所以我们可证明下面的结果.

定理1 考虑矩阵方程(1)，其中矩阵束 $\lambda C-A$，$\lambda B-D$ 是正

则的，并且它们的幂零指数 u,t 满足 $u\geqslant t$，

$$(\lambda C-A)^{-1}=\lambda^{-1}\sum_{k=-u}^{\infty}U_k\lambda^{-k},$$

$$(\lambda B-D)^{-1}=\lambda^{-1}\sum_{k=-t}^{\infty}V_k\lambda^{-k}, \tag{13}$$

$$W_k=-\sum_{j=-u}^{k+u-1}U_jEV_{k-j-1}, k\geqslant -2u+1, \tag{14}$$

其中

$$V_k=O, -u\leqslant k<-t,$$

则以下结论成立：

(a) 若(1)相容，则

$$W_k=O, -2u+1\leqslant k\leqslant -u-1$$

(b) 若 X 是(1)的解，则

$$XB\Delta_1(V_m)=\Delta_1(W_m),$$

其中 $\Delta_1(\lambda)$ 是 $\lambda C-A$ 的相对特征多项式，$\Delta_1(V_m)$，$\Delta_1(W_m)$分别由(11)和(12)所定义.

(c) 若矩阵束的谱满足

$$\sigma(C,A)\cap\sigma(B,D)=\varnothing, \tag{15}$$

则(1)的唯一解是

$$XB=\Delta_1(W_m)[\Delta_1(V_m)]^{-1}$$

的一个解.

(d) 若(15)成立且矩阵束 $\lambda B-D$ 在∞无特征值，则(1)的唯一解是

$$X=\Delta_1(W_m)[B\Delta_1(V_m)]^{-1} \tag{16}$$

证明 (a)和(b)前面已经得证.(d)是(c)的一个直接结果.由(b)，我们只须证明由(15)可推出矩阵 $\Delta_1(V_m)$可逆.我们假定矩阵束 $\lambda C-A$ 在∞有特征值且有限的特征值为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$.若矩阵束 $\lambda C-A$ 及 $\lambda B-D$ 的谱满足(15)，则 $\lambda B-D$ 仅有有限个特征值 β_1，

$\cdots,\beta_s$ 使得

$$\Delta_1(\beta_j)\neq 0, j=1,\cdots,s. \tag{17}$$

由[103],存在可逆的矩阵 P,Q 使

$$P(\lambda B-D)Q=\mathrm{diag}(\lambda I_{n_1}-J_{n_1}(\beta_1),\cdots,\lambda I_{n_s}-J_{n_s}(\beta_s)),$$

其中 $J_k(\beta)$ 是 $k\times k$ Jordan 块且有特征值 β, $\sum_{j=1}^{s}n_j=n$. 于是,

$$(\lambda B-D)^{-1}=Q\mathrm{diag}[(\lambda I_{n_1}-J_{n_1}(\beta_1))^{-1},\cdots,(\lambda I_{n_s}-J_{n_s}(\beta_s))^{-1}]P, \tag{18}$$

其中 $[\lambda I_{n_j}-J_{n_j}(\beta_j)]^{-1}$ 是一个上三角阵,即

$$[\lambda I_{n_j}-J_{n_j}(\beta_j)]^{-1}=\begin{pmatrix}(\lambda-\beta_j)^{-1} & & *\\ & \ddots & \\ & & (\lambda-\beta_j)^{-1}\end{pmatrix} \tag{19}$$

且

$$(\lambda-\beta_j)^{-1}=\lambda^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_j^k\lambda^{-k}, j=1,\cdots,s \tag{20}$$

由(18)~(20),我们得到(13)的 Laurent 展式的系数可由下式给出:

$$V_k=Q\begin{pmatrix}\beta_1^k & \cdots & \cdots & \cdots\\ & \ddots & & \\ & & \beta_1^k & * & \vdots\\ & & & \ddots & \\ & & & \beta_s^k & \vdots\\ & & & & \\ & & & \ddots & \vdots\\ & & & & \beta_s^k\end{pmatrix}P, k\geqslant 0, \tag{21}$$

将(21)式代入(11)式得

$$\Delta_1(V_m)=Q\begin{pmatrix} \Delta_1(\beta_1) & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \ddots & * & \\ & \Delta_1(\beta_1) & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & \Delta_1(\beta_s) & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \Delta_1(\beta_s) \end{pmatrix}P,$$

并且由(17)可得出 $\Delta_1(V_m)$ 可逆. □

注1 如果我们将定理1中的(b),(c),(d)换成(b′),(c′)及(d′),可得出推论1(见下面),其中

(b′) 若 X 是(1)的解,则

$$\Delta_2(U_n)CX=-\Delta_2(W_n),$$

其中

$\Delta_2(\lambda)=\det(\lambda B-D)=q_n\lambda^n+q_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+q_0$,

$\Delta_2(U_n)=q_nU_n+q_{n-1}U_{n-1}+\cdots+q_0U_0$,

$\Delta_2(W_n)=q_nW_n+q_{n-1}W_{n-1}+\cdots+q_0W_0$.

(c′) 若矩阵束的谱满足(15),则(1)的唯一解是下列方程的一个解

$$CX=-[\Delta_2U_n)]^{-1}\Delta_2(W_n).$$

(d′) 若(15)成立且矩阵束 $\lambda C-A$ 在∞无特征根,则(1)的唯一解为

$$X=-[\Delta_2(U_n)C]^{-1}\Delta_2(W_n). \tag{22}$$

推论1 如果

(i) 矩阵束 $\lambda C-A$ 和 $\lambda B-D$ 是正则的,

(ii) $\sigma(C,A)\cap\sigma(B,D)=\varnothing$,

则矩阵方程(1)的唯一解可由(16)或(22)给出.

下面我们证明 Jameson[104]的结果是定理1的一个推论.

推论2 (Jameson) 考虑矩阵方程

$$AX-XD=E \tag{23}$$

其中 $A\in F^{m\times m}$,$D\in F^{n\times n}$,$E\in F^{m\times n}$,则以下结论成立:

(a) 若 X 是(23)的一个解,则

$$X\Delta_1(D)=-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{k-1}P_kA^jED^{k-j-1},$$

其中

$$\Delta_1(\lambda)=\det(\lambda I_m-A)=p_m\lambda^m+p_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+p_0.$$

(b) 若系数矩阵的谱满足

$$\sigma(A)\cap\sigma(D)=\varnothing,$$

则(23)的唯一解为

$$X=(-\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{k-1}p_kA^jED^{k-j-1})[\Delta_1(D)]^{-1}.$$

证明 矩阵方程(23)是(1)的特殊情形:$B=I_n$,$C=I_m$,并且可验知正则矩阵束 λI_m-A,λI_n-D 有幂零指数 $u=t=0$,相应的 Laurent 展式为

$$(\lambda I_m-A)^{-1}=\lambda^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}U_k\lambda^{-k},U_k=A^k$$

$$(\lambda I_n-D)^{-1}=\lambda^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}V_k\lambda^{-k},V_k=D^k.$$

由(14)可得

$$W_k=-\sum_{j=0}^{k-1}A^jED^{k-j-1},k\geqslant 1.$$

故由定理1立得推论2的证明. □

2 奇异矩阵的情形

考虑矩阵方程(2),其中 $\lambda C-A$ 和 $\lambda B-D$ 分别是 $m\times n$ 和 $p\times q$ 的奇异矩阵束.我们可根据下面的等价变换将上述奇异矩阵束化为 Kronecker 标准形[103].等价变换为

$$P_2(\lambda C-A)Q_1=\lambda C_0-A_0,$$
$$P_2(\lambda B-D)Q_2=\lambda B_0-D_0 \tag{24}$$

如果设 $\lambda C-A$ 是右可逆的，$\lambda B-D$ 是左可逆的，则

$$\lambda C_0-A_0=$$

$$\begin{bmatrix} L_{r_1}(\lambda) & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & & & \\ & & L_{r_a}(\lambda) & & & & & & \\ & & & I_{m_1}-\lambda J_{m_1}(0) & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & I_{m_0}-\lambda J_{m_0}(0) & & & \\ & & O & & & & \lambda I_{n_1}-J_{m_a}(0) & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda I_{n_c}-J_{n_c}(\alpha_c) \end{bmatrix},$$

$$\lambda B_o-D_o=$$

$$\begin{bmatrix} L'_{l_1}(\lambda) & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & & & \\ & & L'_{l_d}(\lambda) & & & & & & \\ & & & I_{p_1}-\lambda J_{p_1}(0) & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & I_{p_e}-\lambda J_{p_e}(0) & & & \\ & & & & & & \lambda I_{q_1}-J_{q_1}(\beta_1) & & \\ & & O & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda I_{q_f}-J_{q_f}(\beta_f) \end{bmatrix}.$$

其中 $L_k(\lambda)$ 表示 $k\times(k+1)$ 的形如下式的奇异矩阵束：

$$L_k(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$$

$$m=\sum_{i=1}^{a}\gamma_i+\sum_{i=1}^{b}m_i+\sum_{i=1}^{c}n_i, n=m+a,$$

$$q=\sum_{i=1}^{d}l_i+\sum_{i=1}^{e}p_i+\sum_{i=1}^{f}q_i, p=q+d.$$

由(24)，矩阵方程(2)等价于

$$(\lambda C_0-A_0)X_0B_0-C_0X_0(\lambda B_0-D_0)=-E_0, \qquad (25)$$

其中

$$Q_1X_0P_2=X, E_0=P_1EQ_2.$$

(25)可简化为无关的方程组

$$[\lambda C_0-A_0]_i[X_0]_{ij}[B_0]_j-[C_0]_i[X_0]_{ij}[\lambda B_0-D_0]_j=-[E_0]_{ij}. \qquad (26)$$

当标准块$[\lambda C_0-A_0]_i$及$[\lambda B_0-D_0]_j$是正则的时候，(26)在这些矩阵束的谱之交为空集的条件下有唯一解. 当$[\lambda C_0-A_0]_i$和$[\lambda B_0-D_0]_j$中有一个或二者都是奇异的时候，我们可将此问题化为正则的情形，如当这两个标准块皆奇异时，

$$[\lambda C_0-A_0]_i=L_{r_i}(\lambda), [\lambda B_0-D_0]_j=L_{l_j}'(\lambda).$$

将$L_{r_i}(\lambda)$的第一列和$L_{l_j}'(\lambda)$的最后一行删去，则截块$\overline{[\lambda C_0-A_0]_i}$及$\overline{[\lambda B_0-D_0]_j}$皆是正则的，且前者在$\infty$有$r_i$个特征值，后者在$O$点有$l_j$个特征值. 这相当于使$\overline{[X_0]_{ij}}$的第一行和最后一行等于$O$并解得$\overline{[X_0]_{ij}}$. 用这种方式将方程(26)换为

$$\overline{[\lambda C_o-A_o]_i[X_o]_{ij}[B_o]_j}-\overline{[C_o]_i[X_o]_{ij}[\lambda B_o-D_o]_j}=-[E_0]_{ij}, \qquad (27)$$

这里正则矩阵束的谱不相交. 此方程有唯解，将此解加上一零行一零列重构$[X_0]_{ij}$，则$[X_0]_{ij}$是(26)的解. 把所有这些解合起来，可构造不唯一的矩阵X_0满足(25). 于是，我们有下面的

定理2 考虑矩阵方程

$$AXB-CXD=E \tag{28}$$

其中 $A,C\in F^{m\times n}$, $B,D\in F^{p\times q}$, $E\in F^{m\times q}$. 如果 $\lambda C-A$ 和 $\lambda B-D$ 分别是右可逆和左可逆，且 $\sigma(C,A)\cap\sigma(B,D)=\varnothing$，则(28)有解.

§ 16　矩阵方程 $\sum f_{ik}A^iXB^k=C$

本节研究矩阵方程

$$\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1}f_{ik}A^iXB^k=C \tag{1}$$

首先给出体上矩阵方程

$$\sum_{i=1}^{t}A_iXB_i=E \tag{2}$$

有解的充要条件及通解表达式，然后研究矩阵方程(1)在代数闭域上有唯一解的充要条件及唯一解的表达式，并讨论了解的某些性质.

1　体上的矩阵方程(2)

设 R 是任意一个体 Ω 的中心，$\sigma(A)=[x_1',\cdots,x_n']'=\alpha$ 表示矩阵 A 的拉直(见第一章§6)，其中 x_i' 是 A 的第 i 行，易知

$$\sigma^{-1}(\alpha)=A.$$

考虑矩阵方程(2)，其中 $A_i\in\Omega^{m\times n}$, $B_i\in R^{s\times t}$, $E\in\Omega^{m\times n}$. 矩阵方程(2)可改写为

$$V\sigma(X)=\sigma(E), \tag{3}$$

其中

$$V=\sum_{i=1}^{t}A_i\otimes B_i'.$$

易知，(2)有解当且仅当(3)有解.

仿照本章§1定理2的证明可证得下面的

定理1　考虑(3)，令 $\operatorname{rank}V=r$，且

$$U=\begin{pmatrix} V & -\sigma(E) \\ I_{ns} & O \end{pmatrix},$$

则有

(i) U 总可经过一些初等列变换(最后一列仅用 $T_{ij}(k), i\leqslant r$)化为如下形式

$$G=\begin{pmatrix} S_{mt\times r} & O & L_{mt\times 1} \\ M_{ns\times r} & N_{ns\times(ns-r)} & F_{ns\times 1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

其中 $S\in\Omega_r^{mt\times r}, L_{mt\times 1}\doteq O$ 或 $\operatorname{rank}[S,L]\geqslant r+1$;

(ii) (3)有解的充要条件是 $L_{mt\times 1}=O$;

(iii) (4) 中的 N 是(3)的导出组的基础解阵,(3)有解时,(4)中的 $F_{ns\times 1}$ 为(3)的一个特解,且其通解表达式为

$$\sigma(X)=F_{ns\times 1}+N_{ns\times(ns-r)}T_{(ns-r)\times 1} \tag{5}$$

其中 $T\in\Omega^{(ns-r)\times 1}$ 为任意的.

定理2 若矩阵方程(2)有解,则其通解为

$$X=\sigma^{-1}(F)+\sigma^{-1}(NT) \tag{6}$$

其中 F,N,T 如定理1所述.

由上述两个定理可得解矩阵方程(2)的具体步骤:

(i) 令

$$U=\begin{pmatrix} V & -\sigma(E) \\ I_{ns} & O \end{pmatrix},$$

对 U 作一些初等列变换(最后一列仅施行 $T_{ij}(k), i\leqslant r$)化为(4)的形式.

(ii) 若(4)中的 $L=O$,则(2)有解,否则无解;有解时,写出(4)中的 N 与 F.

(iii) 根据(5)与(6)写出(2)的通解.

2 矩阵方程(1)

本段设 F 是一个代数闭域,考虑矩阵方程(1),其中 $A\in F^{q\times q}$, $B\in F^{q\times q}, C\in F^{q\times q}$

设 $F[x,y]$是 F 上的关于变量为 x,y 的 F 上的多项式环. 令

$$a(x)=\det(xI-A), b(y)=\det(yI-B).$$

并设

$$\Psi=(a(x),b(y))$$

是 $K[x,y]$的由 A 和 B 的特征多项式所生成的理想. 令 $f(x,y)\in F[x,y]$, 且

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1}f_{ik}x^iy^k, \tag{7}$$

$X\in F^{p\times q}$, 定义

$$(f+\Psi)*X=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1}f_{ik}A^iXB^k, \tag{8}$$

则 $F^{p\times q}$是商环 $F[x,y]/\Psi$ 上的一个模, 且矩阵方程(1)可改写为

$$(f+\Psi)*X=C.$$

若 $f+\Psi$ 是 $F[x,y]/\Psi$ 中的一个单位, 我们将证明(1)的唯一解可表成

$$X=(g+\Psi)*C=\sum\sum g_{jm}A^jCB^m,$$

其中,

$$g(x,y)=\sum\sum g_{jm}x^jy^m$$

满足

$$gf\equiv 1(\mathrm{mod}\Psi). \tag{9}$$

对于 $c\in F, f,g\in F[x,y], X,Y\in F^{p\times q}$, 有

(i) $c*X=cX$,

(ii) $f*(X+Y)=f*X+f*Y$,

(iii) $(f+g)*X=f*X+g*X$,

(iv) $(fg)*X=f*(g*X)$.

由 Cayley－Hamilton 定理知, $a(x)*X=0$及 $b(y)*X=0$. 故对所有的 $d\in\Psi$, 有 $d*X=0$. 于是,

$$(f+\Psi)*X=f*X.$$

我们可证明下面的引理.

引理1[106] 令 $p=\deg a(x)$, $q=\deg b(y)$. 对每个 $h\in F[x,y]$, 必有唯一的多项式

$$r(x,y)=\sum_{u=0}^{p-1}\sum_{v=0}^{q-1}\gamma_{uv}x^u y^v$$

使
$$h\equiv r(\bmod\Psi).$$

证明留给读者.

设

$$F_a=\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & & & -a_0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

是 $a(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{p-1}x^{p-1}+x^p$ 的伴侣矩阵.

则

$$(1,x,\cdots,x^{p-1})x^i\equiv(1,x,\cdots,x^{p-1})F_a^i(\bmod\Psi), \tag{10}$$

引理2 设 $f\in F[x,y]$, 形如(7), 且令 F_a 和 F_b 分别是 a 和 b 的伴侣矩阵, 则多项式

$$g(x,y)=\sum_{u=0}^{p-1}\sum_{t=0}^{q-1}g_{ut}x^u y^t=(1,x,\cdots,x^{p-1})G(1,y,\cdots,y^{q-1})'$$

满足

$$fg\equiv 1\quad(\bmod\Psi) \tag{11}$$

当且仅当

$$\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1}f_{ik}F_a^iG(F_b')^k=(1,0,\cdots,0)'(1,0,\cdots,0)_{p\times q}.$$

证明 由(10)及

$$y^k(1,y,\cdots,y^{q-1})'\equiv(F_b')^k(1,y,\cdots,y^{q-1})',$$

有(11)等价于

$$(1,x\cdots,x^{p-1})\sum_{i,k}f_{ik}F_a^iG(F_b')^k(1,y,\cdots,y^{q-1})'=1$$

$$=(1,x,\cdots,x^{p-1})(1,0,\cdots,0)'(1,0,\cdots,0)(1,y,\cdots,y^{p-1})'.$$

令 $V(f(x,y))=\{(\alpha,\beta)\in F^2\,|\,f(\alpha,\beta)=0\}$，我们有

定理3 以下等价：

(1) 矩阵方程(1)对所有的 $C\in F^{p\times q}$有唯一解.

(2) 对 A 的所有特征值 λ 及 B 的所有特征值 u 有 $f(\lambda,u)\neq 0$.

(3) $V(f(x,y))\cap V(a(x))\cap V(b(y))=\varnothing$.

(4) $f+\Psi$ 是 $F[x,y]/\Psi$ 的一个单位.

(5) 方程

$$\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1}f_{ik}F_a^iY(F_b')^k=(1,0,\cdots,0)'(1,0,\cdots,0)$$

相容.

证明 在引理2中，我们已证(4)⇔(5).

下证(1)⇔(2)：设 $f(\lambda,u)=0$ 及 $u'A=\lambda u'$，$u\neq 0$，$B\omega=u\omega$，$\omega\neq 0$，则 $X=u'\omega$ 是

$$\sum\sum f_{ik}A^iXB^k=0$$

的解. 因 $u'\omega\neq 0$，故解不唯一.

(2)⇒(3)是显然的.

(3)⇒(4)：陪集 $f+\Psi$ 是一个单位，如果有一个 $\Psi+g(x,y)$ 使得

$$[\Psi+g(x,y)][\Psi+f(x,y)]=\Psi+1.$$

或等价于：如果存在 $g(x,y),s(x,y),t(x,y)$使

$$f(x,y)g(x,y)+a(x)s(x,y)+b(y)t(x,y)=1.$$

如果(3)成立，由 Hilbert's Nullstellensatz[107]，存在 $g,s,t\in F[x,y]$使上式成立.

(4)⇒(1)：若$(f+\Psi)^{-1}=g+\Psi$ 存在，则可验知

$$X=(g+\Psi)*C \tag{12}$$

是(1)的唯一解. □

对于 $L\in F^{p\times t}, R\in F^{t\times q}$,令

$$S_r(A,L)=(L,AL,\cdots,A^{r-1}L)$$

及

$$O_s(B,R)=\begin{pmatrix}R\\RB\\\vdots\\RB^{s-1}\end{pmatrix}.$$

当 $r=p$ 及 $s=q$ 时,我们省去以上两式的下标.故 $S(A,L)$ 是矩阵对 (A,L) 的可控矩阵,$O(B,R)$ 是矩阵对 (B,R) 的可测矩阵.如果 $S(A,L)$ 的秩最大,则 (A,L) 是可控的.

上述记号可使解(12)表示成简洁的形式.

定理4 设矩阵方程(1)对所有的 C 有唯一解,令

$$g(x,y)=\sum_{u=0}^{m-1}\sum_{t=0}^{n-1}g_{ut}x^u y^t$$

是一个满足下式的多项式:

$$fg\equiv 1(\mathrm{mod}\Psi),$$

则(1)的解可表成

$$X=\sum_{u=0}^{m-1}\sum_{t=0}^{n-1}g_{ut}A^u B^t. \tag{13}$$

令 $G=(g_{ut})$ 是一个生成 $g(x,y)$ 的 $m\times n$ 阵,如果 $C=LR$,则

$$X=S_m(A,L)(G\otimes I_l)O_n(B,R). \tag{19}$$

证明 在(13)中,我们有

$$X=(I,A,\cdots,A^{m-1})G\otimes C)\begin{pmatrix}I\\B\\\vdots\\B^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$=S_m(A,I)G\otimes C)O_n(B,I). \tag{20}$$

若 $C=LR$,则 $G\otimes C=(I\otimes L)(G\otimes I)(I\otimes R)$.

进而，

$$S_m(A,L)=S_m(A,I)(I\otimes L)$$

和

$$O_n(B,R)=(I\otimes R)O_n(B,I).$$

故由(20)即得(19). □

由 Cayley—Hamilton 定理知，

$$\mathrm{rank}S_m(A,L)\leqslant \mathrm{rank}S(A,L)$$

及

$$\mathrm{rank}O_n(B,R)\leqslant \mathrm{rank}O(B,R).$$

由(19)式可得下面的

定理5 设 $C=LR$ 且矩阵方程(1)有唯一解 X,则有

$$\mathrm{rank}x\leqslant \min\{\mathrm{rank}S(A,L),\mathrm{rank}O(B,R)\}.$$

下面,我们给出定理5的另一证法.

证明 对于给定的矩阵对(A,L)和(B,R),存在可逆阵 Q 和 T 使

$$Q^{-1}AQ=\overset{p_1}{\begin{pmatrix} A_1 & A_{12} \\ O & A_2 \end{pmatrix}}\begin{matrix} p_1 \\ \\ \end{matrix},Q^{-1}L=\begin{pmatrix} L_1 \\ O \end{pmatrix}\begin{matrix} p_1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$TBT^{-1}=\overset{q_1}{\begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_{21} & B_2 \end{pmatrix}}\begin{matrix} q_1 \\ \\ \end{matrix},$$

$$RT^{-1}=\overset{q_1}{(R_1,O)}$$

$$p_1=\mathrm{rank}S(A,L),q_1=\mathrm{rank}O(B,R). \tag{21}$$

于是，

$$Q^{-1}CT^{-1}=\begin{pmatrix} L_1R_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

令

$$Q^{-1}XT^{-1}=\begin{pmatrix} X_1 & X_{12} \\ X_{21} & X_2 \end{pmatrix}$$

是相容分块的. X_2是齐次方程

$$\sum\sum f_{ik}A_2^iX_2B_2^k=O$$

的解. 故 $X_2=O$.

从而, $X_{12}=O$, 及 $X_{21}=O$. 所以,

$$Q^{-1}XT^{-1}=\begin{pmatrix} X_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}, X_1\in F^{p_1\times q_1}.$$

再由(21)即得证明. □

第三章　线性矩阵方程组

本章讨论几类环与体上的线性矩阵方程组，给出其有各种解的充要条件及其通解表达式．

§1　体上的矩阵方程组$[AX, BX]=[A, O]$与$[XA, XB]=[A, O]$

本节在体上研究矩阵方程组

$$\begin{cases} AX=A \\ BX=O \end{cases} \tag{1}$$

与矩阵方程组

$$\begin{cases} XA=A \\ XB=O \end{cases} \tag{2}$$

给出(1)和(2)在任意体Ω上有一般解，在具有对合反自同构的体K上有自共轭解，在四元数体Q上有亚(半)正定解的充要条件及其解集结构．

1　矩阵方程组(1)在Ω上的一般解

考虑矩阵方程组(1)，其中$A\in\Omega^{m\times n}$，$B\in\Omega^{s\times n}$是已知矩阵，$O\in\Omega^{s\times n}$是零矩阵，$X\in\Omega^{n\times n}$是未知矩阵．

本节首先利用矩阵的广义逆，研究了(1)的有解判定、解的性质及其通解表达式，然后利用矩阵的初等变换给出了(1)求解的实用方法．从而使通常的投影矩阵在任意体上得到了进一步推广．

引理 1　设$A\in\Omega^{m\times n}$，$B\in\Omega^{s\times n}$，则

$$B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}BA^{(1)}A-BA^{(1)}A$$
$$=B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B-B.$$

证明 $B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}BA^{(1)}A-BA^{(1)}A$
$=B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B(I-I+A^{(1)}A)-BA^{(1)}A$
$=B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B$
$-B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B(I-A^{(1)}A)-BA^{(1)}A$
$=B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B-B.$ □

引理 2 设 $A\in\Omega^{m\times n}$，X_0 是矩阵方程
$$AX=A$$
的任一解，则对任意的 $Y\in\mu(A)$，有 $YX_0=Y$.

证明 对任意的 $Y\in\mu(A)$，存在 $X_1\in\Omega^{1\times m}$使 $Y=X_1A$. 故
$$YX_0=X_1AX_0=X_1A=Y.$$ □

定理 1 对矩阵方程组(1)，以下等价：

(i) (1)相容.

(ii) $B(I-A^{(1)}A)Y=-BA^{(1)}A$ (3)

关于 Y 相容.

(iii) $\mathrm{rank}B(I-A^{(1)}A)=\mathrm{rank}(-BA^{(1)}A,B(I-A^{(1)}A)$.

(iv) $B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B=B$.

(v) $A(I-B^{(1)}B)Y=A.$ (4)

关于 Y 有解.

(vi) $\mathrm{rank}A(I-B^{(1)}B)=\mathrm{rank}(A,A(I-B^{(1)}B))$.

(vii) $A(I-B^{(1)}B)[A(I-B^{(1)}B)]^{(1)}A=A$.

证明 由第二章§1定理1知，(ii)⇔(iii)及(v)⇔(vi). 由第二章§3定理6知，(v)⇔(vii). 下证(i)⇔(ii)：设 X 是(1)的一个解，则
$$B(I-A^{(1)}A)X=BX-BA^{(1)}AX=-BA^{(1)}A.$$
此示 X 是(3)的一个解. 反之，设 Y 是(3)的一个解且
$$X=A^{(1)}A+(I-A^{(1)}A)Y,$$

则
$$AX=AA^{(1)}A+A(I-A^{(1)}A)=A,$$
$$BX=BA^{(1)}A+B(I-A^{(1)}A)Y=O.$$
故 X 是(1)的一个解．从而(i)⇔(ii).

下证(ii)⇔(iv)：由第二章§3定理6知，矩阵方程(3)相容当且仅当

$$B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}(-BA^{(1)}A)=-BA^{(1)}A.$$

由引理1知，上式等价于

$$B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B=B.$$

最后我们证明(i)⇔(v)：设 X 是(1)的一个解，则

$$A(I-B^{(1)}B)X=AX-AB^{(1)}BX=A.$$

此示 X 也是(4)的一个解．反之，设 Y 是(4)的一个解，则

$$A(I-B^{(1)}B)Y=A,B(I-B^{(1)}B)Y=O.$$

故 $(I-B^{(1)}B)Y$ 是(1)的一个解，从而，(i)⇔(v). □

定理 2　对于矩阵方程组(1)，以下条件等价：

(i)　(1)相容．

(ii)　$\mu(A)\cap\mu(B)=\{0\}$.

(iii)　$\dim\mu(A)+\dim\mu(B)=\dim\mu\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$.

(iv)　$\mathrm{rank}A+\mathrm{rank}B=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$.

证明　(iii)⇔(iv)是显然的．由维数公式易证得(ii)⇔(iii).

下证(i)⇔(ii)：设 X_0 是(1)的一个解，则对任意的

$$Y\in\mu(A)\cap\mu(B),$$

存在 $X_1\in\Omega^{1\times m}$ 及 $X_2\in\Omega^{1\times s}$ 使 $Y=X_1A=X_2B$. 于是，

$$Y=X_1A=X_1AX_0=X_2BX_0=O.$$

故

$$\mu(A)\cap\mu(B)=\{0\}.$$

反之，设 $\mu(A)\cap\mu(B)=\{0\}$，则对任意的 $\alpha\in\Omega^{1\times s}$，由引理1

知，

$$\alpha\{B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}BA^{(1)}A-BA^{(1)}A\}$$
$$=\alpha\{B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B-B\}\in\mu(A)\cap\mu(B).$$

故

$$\alpha\{B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B-B\}=0$$

因 α 是任意的，故

$$B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B=B.$$

由定理 1 知，(1)相容．□

注 1　由定理 2，矩阵方程组(1)定义了一个 $\mu\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ 上沿 $\mu(B)$ 到 $\mu(A)$ 的投影阵．特别地，当 $\mu\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=C^{1\times n}$($C$ 是复数域)时，这个投影阵就是通常的投影阵．

定理 3　设矩阵方程组(1)有解，则其通解有下述两种形式的表达式：

$$X=A^{(1)}A+(I-A^{(1)}A)Y-(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}BA^{(1)}A$$
$$-(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B(I-A^{(1)}A)Y, \tag{5}$$

$$X=(I-B^{(1)}B)[A(I-B^{(1)}B]^{(1)}A+(I-B^{(1)}B)Y-(I-B^{(1)}B)[A$$
$$(I-B^{(1)}B)]^{(1)}A(I-B^{(1)}B)Y, \tag{6}$$

其中 $Y\in\Omega^{n\times n}$是任意的．

证明　由定理 1 知，(1)相容的充要条件是

$$B(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B=B.$$

由此，将(5)代入(1)即知(5)是(1)的一个解．

反之，设 X_0 是(1)的任一解，则

$$X_0=A^{(1)}A+(I-A^{(1)}A)X_0-(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}BA^{(1)}A$$
$$-(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B(I-A^{(1)}A)X_0.$$

故 X_0 可表成(5)的形式．

同理可证(6)也是(1)的一般解．□

定理 4 设 X_0 是矩阵方程组(1)的一个特解，则(1)有如下两种形式的通解表达式：

$$X=X_0+(I-A^{(1)}A)Y$$
$$-(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B(I-A^{(1)}A)Y; \qquad (7)$$
$$X=X_0+(I-B^{(1)}B)Y$$
$$-(I-B^{(1)}B)[A(I-B^{(1)}B)]^{(1)}A(I-B^{(1)}B)Y, \qquad (8)$$

其中 $Y\in\Omega^{n\times n}$ 是任意的．

证明 将(7)代入(1)即知(7)为(1)的解．另一方面，设 X 是(1)的任一解，则

$$AX=AX_0=A, BX=BX_0=O.$$

于是，

$$A(X-X_0)=O, B(X-X_0)=O.$$

故

$$X=X_0+(I-A^{(1)}A)(X-X_0)$$
$$-(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B(I-A^{(1)}A)(X-X_0).$$

即 X 可表成(7)的形式．

同理可证(8)亦是(1)的通解．□

下面我们给出(1)有唯一解的充要条件．

定理 5 对于矩阵方程组(1)，以下条件等价：

(i) 矩阵方程组(1)有唯一解．

(ii) $\mu(A)\oplus\mu(B)=\Omega^{1\times n}$.

(iii) $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=n$.

(1)有唯一解 X 时，

$$X=A^{(1)}A-(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}BA^{(1)}A$$
$$=(I-B^{(1)}B)[A(I-B^{(1)}B)]^{(1)}A,$$

且这个唯一解 X 是沿着 $\mu(B)$ 到 $\mu(A)$ 的一个投影阵．

证明 由定理 2 及维数公式可得(ii)⇔(iii)，下证(i)⇔(ii)：

设 $\mu(A)\oplus\mu(B)=\Omega^{1\times n}$，则

$$\mu(A)\cap\mu(B)=\{0\}.$$

从而由定理 2 知，矩阵方程组(1)有解．设 X_1,X_2 是(1)的解，则对任意的 $Y\in\Omega^{1\times m}$，必存在 $Y_1\in\Omega^{1\times m}$ 和 $Y_2\in\Omega^{1\times s}$ 使

$$Y=Y_1A+Y_2B.$$

于是，

$$\begin{aligned}Y(X_1-X_2)&=(Y_1A+Y_2B)(X_1-X_2)\\&=Y_1AX_1+Y_2BX_1-Y_1AX_2-Y_2BX_2\\&=O.\end{aligned}$$

因 Y 是任意的，故 $X_1=X_2$. 即(1)仅有唯一解．

反之，设(1)有唯一解，则由定理 2 知，

$$\mu(A)\cap\mu(B)=\{0\}.$$

由(7)知，对任意的 $Y\in\Omega^{n\times n}$，有

$$(I-A^{(1)}A)Y-(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B(I-A^{(1)}A)Y=O,$$

否则，解不唯一．于是，由 Y 的任意性知，

$$\begin{aligned}I&=A^{(1)}A+(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B(I-A^{(1)}A)\\&=A^{(1)}A-(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}BA^{(1)}A\\&\quad+(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B.\end{aligned}$$

故对任意的 $\alpha\in\Omega^{1\times n}$，有

$$\begin{aligned}\alpha&=\alpha I\\&=\alpha\{A^{(1)}A-(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]BA^{(1)}A\}\\&\quad+\alpha(I-A^{(1)}A)[B(I-A^{(1)}A)]^{(1)}B.\end{aligned}\tag{9}$$

所以，

$$\mu(A)+\mu(B)=\Omega^{1\times n}.$$

综上，

$$\Omega^{1\times n}=\mu(A)\oplus\mu(B).$$

当(1)有唯一解时，在(1)的通解表达式(5)和(6)中，令 $Y=O$，得(1)的唯一解：

$$X = A^{(1)}A - (I - A^{(1)}A)[B(I - A^{(1)}A)]^{(1)}BA^{(1)}A$$
$$= (I - B^{(1)}B)[A(I - B^{(1)}B)]^{(1)}A. \tag{10}$$

由(9)式，对任意的 $\alpha \in \Omega^{1\times n}$，

$$\alpha\{A^{(1)}A - (I - A^{(1)}A)[B(I - A^{(1)}A)]^{(1)}BA^{(1)}A\}$$

是 α 沿着 $\mu(B)$ 到 $\mu(A)$ 的投影．故(10)是沿着 $\mu(B)$ 到 $\mu(A)$ 的投影阵，因而是幂等矩阵．□

定理 6 设 X 是矩阵方程组(1)的任一解，且

$$\mathrm{rank}X = \mathrm{rank}A,$$

则 X 是幂等的．

证明 因 X 是矩阵方程组(1)的解，故有

$$AX = A.$$

由引理 2 知，

$$\mu(A) \subseteq \mu(X).$$

而

$$\mathrm{rank}X = \mathrm{rank}A,$$

故

$$\mu(A) = \mu(X).$$

从而存在 $Y \in \Omega^{n\times m}$ 使得

$$X = YA.$$

故

$$X^2 = (YA)(YA) = YAX = YA = X. \ \square$$

仿第二章 § 1 的处理方法，我们可证得下面的

定理 7 考虑矩阵方程组(1)．令

$$C = \begin{pmatrix} A & -A \\ B & O \\ I_n & O \end{pmatrix},$$

则

(i) 对 C 施行一系列初等变换(初等行变换仅对前 $m+s$ 行施行；$T_{ij}(k)(i<j)$ 仅对后 n 列施行)总可化为如下形式

$$G=\begin{pmatrix} D_{(m+n)r} & O & E_{(m+s)n} \\ M_{nr} & N_{n(n-r)} & U_{nn} \end{pmatrix}$$

其中

$$D\in\Omega_r^{(m+s)\times r}, E=O$$

或 $$\text{rank}[D,E]\geqslant r+1.$$

(ii) 矩阵方程组(1)相容当且仅当 $E=O$.

(ii) G 中的 N 是(1)的导出方程组

$$[AX,BX]=O$$

的基础解阵. 若(1)有解,则 G 中的 U 是(1)的一个特解,且(1)的通解为

$$X=U+N_{n(n-r)}H_{(n-r)n}$$

其中,$r=\text{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$,$H\in\Omega^{(n-1)\times n}$是任意的.

2 矩阵方程组(1)的自共轭解与亚半正定解

本段在 K 上考虑矩阵方程(1)有自共轭解、在 Q 上有亚半正定解的充要条件及其解集结构. 其证明方法仿第二章§1,故以下结果的证明均留给读者.

令矩阵方程组(1)中的 $A\in K^{m\times n}$,$B\in K^{s\times n}$及 $\text{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r$. 于是,存在 $P\in GL_{m+s}(K)$和 $Q\in GL_n(K)$使

$$P\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}.$$

令

$$P\begin{pmatrix}A\\O\end{pmatrix}Q^{-*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{matrix}r\\ m+s-r\end{matrix},$$

$$\begin{matrix}r & n-r\end{matrix}$$

及

$$N=(A_{21},A_{22}).$$

定理 8　矩阵方程组(1)有自共轭解的充要条件为 $N=O$ 且 $AB^*=O$. 有此种解时,其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^* & X_{22}\end{pmatrix}Q^*\ \middle|\ X_{22}\in SC_{n-r}(K)\right\}.$$

定理 9　矩阵方程组(1)有反自共轭解的充要条件为 $N=O$ 且 $AB^*=O$. 有此种解时,其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ -A_{12}^* & X_{22}\end{pmatrix}Q^*\ \middle|\ X_{22}\in SS_{n-r}(K)\right\}.$$

以下令 $K=Q$.

定理 10　矩阵方程组(1)有亚半正定解当且仅当 $N=O$ 及 $B^*A=O$. 有此种解时,其解集为

$$\left\{Q\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ -A_{12}^*+U^*(A_{11}+A_{11}^*) & D+U^*A_{11}U\end{pmatrix}Q^*\right.$$
$$\left.\middle|\ D\in SP_{n-r}^*,U\in Q^{r\times(n-r)}\right\}.$$

注 2　读者可给出矩阵方程组(1)有次自共轭解、斜亚半正定解的充要条件及其解集结构.

3　矩阵方程组(2)的相应结果

类似于矩阵方程组(1)的各种结果的证明,我们可有关于(2)的相应结果.

令 $A\in\Omega^{n\times s},B\in\Omega^{n\times t}$为已知阵,$X\in\Omega^{n\times n}$为未知阵.

定理 11　对矩阵方程组(2),以下几条等价:

(i)　(2)有解.

(ii)　矩阵方程

$$Y(I-AA^{(1)})B=-AA^{(1)}B$$

关于 Y 有解.

(iii) $\operatorname{rank}(I-AA^{(1)})B=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}(I-AA^{(1)})B\\ -AA^{(1)}B\end{pmatrix}$.

(iv) $B[(I-AA^{(1)})B]^{(1)}(I-AA^{(1)})B=B$.

(v) 矩阵方程

$$Y(I-BB^{(1)})A=A$$

关于 Y 有解.

(vi) $\operatorname{rank}(I-BB^{(1)})A=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}(I-BB^{(1)})A\\ A\end{pmatrix}$.

(vii) $A[(I-BB^{(1)})A]^{(1)}(I-BB^{(1)})A=A$.

定理 12 对于矩阵方程组(2),以下条件等价:

(i) (2)有解.

(ii) $R(A)\cap R(B)=\{0\}$.

(iii) $\dim R(A)+\dim R(B)=\dim R(A,B)$.

(iv) $\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}(A,B)$.

定理 13 设矩阵方程组(2)有解,则其通解有下述两种表达式:

$$X=AA^{(1)}+Y(I-AA^{(1)})-AA^{(1)}B[(I-AA^{(1)}B]^{(1)})(I-AA^{(1)})-Y(I-AA^{(1)})B[(I-AA^{(1)})B]^{(1)}(I-AA^{(1)});$$

或

$$X=A[(I-BB^{(1)})A]^{(1)}(I-BB^{(1)})+Y(I-BB^{(1)})-Y(I-BB^{(1)})A[(I-BB^{(1)})A]^{(1)}(I-BB^{(1)}),$$

其中 $Y\in\Omega^{n\times n}$为任意的.

定理 14 设 X_0 为矩阵方程组(2)的一个特解,则(2)有如下两种形式的通解表达式:

$$X=X_0+Y(I-AA^{(1)})-Y(I-AA^{(1)})B[(I-AA^{(1)})B]^{(1)}(I-AA^{(1)});$$

$$X=X_0+Y(I-BB^{(1)})-Y(I-BB^{(1)})A[(I-BB^{(1)})A]^{(1)}(I-BB^{(1)});$$

其中 $Y\in\Omega^{n\times n}$ 是任意的．

定理 15　对于矩阵方程组(2)，以下条件等价：

(i)　(2)有唯一解．

(ii)　$R(A)\oplus R(B)=\Omega^{n\times 1}$.

(iii)　$\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}(A,B)=n$.

定理 16　设 X 是矩阵方程组(2)的任一解，且

$$\operatorname{rank}X=\operatorname{rank}A,$$

则 X 为幂等矩阵．

定理 17　考虑矩阵方程(2)，令 $\operatorname{rank}(A,B)=r$，

$$C=\begin{pmatrix} A & B & I \\ -A & O & O\end{pmatrix},$$

则

(i)　C 可经过一系列初等变换(初等列变换仅对前 $s+t$ 行施行)，总可化为如下形式

$$G=\begin{bmatrix} D_{r(s+t)} & M_{rn} \\ O & N_{(n-r)n} \\ E_{n(s+t)} & U_{nn}\end{bmatrix}$$

其中 $D\in\Omega_r^{r\times(s+t)}$，$E_{n(s+t)}=O$ 或 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}D\\E\end{pmatrix}\geqslant r+1$；

(ii)　(2)有解的充要条件为 $E=O$；

(*iii*)　G 中的 N 为(2)的导出方程组

$$\begin{cases} XA=O \\ XB=O\end{cases}$$

的一个基础解阵；若(2)有解，则 G 中的 U 为(2)的一个特解，且其通解为

$$X=U+D_1N$$

其中 $D_1\in\Omega^{n\times(n-r)}$ 为任意的．

以下令 $\Omega=K$.

对于(2)中的 $A\in K^{n\times s}, B\in K^{n\times t}$ 及 $\operatorname{rank}(A,B)=r$，有 $P\in GL_n(K), Q\in GL_{s+t}(K)$ 使

$$P(A,B)Q=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

令

$$P^{-*}[A,O]Q=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix},\quad (\text{列分块 } n,\ s+t-r)$$

$$N=\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}.$$

定理 18 矩阵方程组(2)有自共轭解当且仅当 $N=O$ 且 $B^*A=O$. 有此种解时，其解集为

$$\left\{P^*\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}^* \\ A_{21} & X_{22} \end{pmatrix}P \,\middle|\, X_{22}\in SC_{n-r}(K)\right\}.$$

定理 19 矩阵方程组(2)有反自共轭解当且仅当 $N=O$ 且 $B^*A=O$. 有此种解时，其解集为

$$\left\{P^*\begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21}^* \\ A_{21} & X_{22} \end{pmatrix}P \,\middle|\, X_{22}\in SS_{n-r}(K)\right\}.$$

定理 20 矩阵方程组(2)有亚半正定解当且仅当 $N=O$ 且 $B^*A=O$. 有此种解时，其解集为

$$\left\{P^*\begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21}^*+(A_{11}+A_{11}^*)U^* \\ A_{21} & D+UA_{11}U^* \end{pmatrix}P \,\middle|\, D\in SP_{n-r}^*, U\in Q^{(n-r)\times r}\right\}.$$

注 2 读者可给出矩阵方程组(2)有次自共轭解、斜亚半正定解的充要条件及解集结构.

§2 体与环上的矩阵方程组 $[A_1XB_1, A_2XB_2]=[C_1, C_2]$

Woude 在文〔110〕中提出了如下问题:给定一个复合线性系统,它有两个外部输入,两个外部输出,一个控制输入及一个测量输出,求一动态输出反馈补偿器,它形成的测量输出抵消外部输入对外部输出的影响. 此问题的数学模型就是解如下的矩阵方程组

$$\begin{cases} A_1XB_2=C_2 \\ A_2XB_2=C_2 \end{cases} \tag{1}$$

1987 年,Chu,K. E[111]利用矩阵的广义奇异值分解,在实数域上研究了(1). 本节将在任意体 Ω 上给出(1)有解的充要条件及其实用解法,在实四元数体 Q 上给出(1)的通解的一种表达式,在单 Artinian 环 R 上给出(1)有解的两个充要条件及在主理想环上给出(1)相容的一个充要条件.

1 Q 上的矩阵方程组(1)

本段考虑实四元数体 Q 上的矩阵方程组(1),其中 $A_i\in Q^{m\times n}$, $B_i\in Q^{n\times s}$, $C_i\in Q^{m\times s}$, $i=1,2$. 给出(1)有解的一个充要条件及其通解表达式,这一结果在计算矩阵的约束逆时是非常有用的.

为给出主要结果,我们需要下面的几个引理.

引理 1 Ω 上的矩阵方程组

$$\begin{cases} AX=B \\ XD=E \end{cases} \tag{2}$$

有解的充要条件是

$$\operatorname{rank}(A,B)=\operatorname{rank}A,\operatorname{rank}\begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}=\operatorname{rank}D,$$

且 $AE=BD$.

有解时，其通解为

$$X=X_0+(I-A^{(1)}A)Y(I-DD^{(1)}) \tag{3}$$

其中，Y 是 Ω 上的相应阶数的任意矩阵，

$$X_0=A^{(1)}B+ED^{(1)}-A^{(1)}AED^{(1)} \tag{4}$$

为(2)的一个特解．

证明 若(2)有解 X，则(2)中的每个方程有解．于是由第二章§3引理5，知

$$\begin{cases}\operatorname{rank}(A,B)=\operatorname{rank}A,\\ \operatorname{rank}\begin{pmatrix}D\\E\end{pmatrix}=\operatorname{rank}D.\end{cases} \tag{5}$$

易验知，

$$BD=AXD=A(XD)=AE. \tag{6}$$

反之，若(5)及(6)式成立，则(2)中的每个方程相容．由第二章§3的定理6知，

$$AA^{(1)}B=B, ED^{(1)}D=E \tag{7}$$

将(4)代入(2)并注意到(6)可得

$$\begin{aligned}AX_0&=A(A^{(1)}B+ED^{(1)}-A^{(1)}AED^{(1)})\\&=B+AED^{(1)}-AED^{(1)}\\&=B;\\X_0D&=(A^{(1)}B+ED^{(1)}-A^{(1)}AED^{(1)})D\\&=A^{(1)}BD+E-A^{(1)}AED^{(1)}D\\&=A^{(1)}BD+E-A^{(1)}BDD^{(1)}D\\&=E.\end{aligned}$$

故 X_0 是(2)的解．

下证(3)是(2)的通解．

一方面，易验知(3)是(2)的解．另一方面，设 X 是(2)的任一解，则

$$X=X_0+(I-A^{(1)}A)(X-X_0)(I-DD^{(1)}). \qquad \square$$

引理 2 相容四元数矩阵方程组 $AXB=C$ 与其正规方程

$$A^*AXBB^*=A^*CB^* \tag{8}$$

等价．

证明 显然，$AXB=C$ 之解是(8)的解．由第二章§4 引理 4 知，(8)一定有解．设 X_0 是其任一解，则由第二章§3 定理 6，X_0 可表成

$$X=A^{(1)}CB^{(1)}+U-A^{(1)}AUBB^{(1)}$$

的形式．于是由第二章§4 引理 2 易验知 $AX_0B=C$，即(8)是 $AXB=C$ 的解．□

定理 1 设 $A_i,B_i\in SP_n$，$i=1,2$，则矩阵方程组(1)相容的充要条件为

$$\operatorname{rank}A_i=\operatorname{rank}(A_i,C_i),\operatorname{rank}B_i=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B_i\\C_i\end{pmatrix},i=1,2, \tag{9}$$

且

$$A_1(A_1+A_2)^{(1)}C_2(B_1+B_2)^{(1)}B_1=A_2(A_1+A_2)^{(1)}C_1(B_1+B_2)^{(1)}B_2. \tag{10}$$

有解时，其一般解为

$$\begin{aligned}X=&(A_1+A_2)^{(1)}(C_1+Y+Z+C_2)(B_1+B_2)^{(1)}+U\\&-(A_1+A_2)^{(1)}(A_1+A_2)U(B_1+B_2)(B_1+B_2)^{(1)}\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $U\in Q^{n\times n}$ 为任意的，Y 与 Z 分别是下列方程组的任一解：

$$\begin{cases}A_2(A_1+A_2)^{(1)}Y=A_1(A_1+A_2)^{(1)}C_2\\Y(B_1+B_2)^{(1)}B_1=C_1(B_1+B_2)^{(1)}B_2\end{cases} \tag{12}$$

及

$$\begin{cases}A_1(A_1+A_2)^{(1)}Z=A_2(A_1+A_2)^{(1)}C_1\\Z(B_1+B_2)^{(1)}B_2=C_2(B_1+B_2)^{(1)}B_1\end{cases} \tag{13}$$

证明 若(1)有解，则由第二章§3 定理 4，(9)成立．由第一章§3 定理 6 易验证(10)式成立．

下证充分性．令(9)及(10)式成立，则由第二章§3 定理 4

知，(1)中的每个方程皆相容．由引理 1 知，(12)及(13)有解．设 Y 与 Z 分别是(12)和(13)的任一解，且令

$$X_0=(A_1+A_2)^{(1)}(C_1+Y+Z+C_2)(B_1+B_2)^{(1)}. \tag{14}$$

因为

$$R(C_1)\subset R(A_1+A_2),$$
$$R(C_1^*)\subset R(B_1+B_2),$$

故有四元数矩阵 W 和 T，使

$$(A_1+A_2)W=C_1,$$
$$T(B_1+B_2)=C_1$$

于是，可验知，

$$\begin{aligned}A_1X_0B_1 &=A_1(A_1+A_2)^{(1)}C_1(B_1+B_2)^{(1)}B_1\\&\quad+A_1(A_1+A_2)^{(1)}C_1(B_1+B_2)^{(1)}B_2\\&\quad+A_2(A_1+A_2)^{(1)}C_1(B_1+B_2)^{(1)}B_1\\&\quad+A_2(A_1+A_2)^{(1)}C_1(B_1+B_2)^{(1)}B_2\\&=(A_1+A_2)(A_1+A_2)^{(1)}C_1(B_1+B_2)^{(1)}(B_1+B_2)=C_1.\end{aligned}$$

同理可验证

$$A_2X_0B_2=C_2.$$

此示，X_0 是(1)的解．

下证(1)有解时，其一般解为(11)．可直接验知(11)为(1)的解．令 X_1 是(1)任一解，且

$$Y=A_1X_1B_2,Z=A_2X_1B_1,$$

则由第一章 § 3 定理 6 可验知 Y 与 Z 分别是(12)与(13)的解，且

$$(A_1+A_2)X_1(B_1+B_2)=C_1+Y+Z+C_2.$$

故由第二章 § 3 定理 6 知，X_1 可表成(11)的形式．□

定理 2 Q 上的矩阵方程组(1)有解的充要条件是

$$\begin{aligned}&A_1^*A_1(A_1^*A_1+A_2^*A_2)^{(1)}A_2^*C_2B_2^*(B_1B_1^*+B_2B_2^*)^{(1)}B_1B_1^*\\&=A_2^*A_2(A_1^*A_1+A_2^*A_2)^{(1)}A_1^*C_1B_1^*(B_1B_1^*+B_2B_2^*)^{(1)}B_2B_2^*\end{aligned} \tag{15}$$

且有

$$\operatorname{rank}\acute{A}_i=\operatorname{rank}(A_i,C_i),\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B_i\\C_i\end{pmatrix},\qquad(16)$$

$i=1,2$. 有解时,其一般解为

$$X=(A_1^*A_1+A_2^*A_2)^{(1)}(A_1^*C_1B_1^*+Y+Z+A_2^*C_2B_2^*)(B_1B_1^*+B_2B_2^*)^{(1)}+U-(A_1^*A_1+A_2^*A_2)^{(1)}(A_1^*A_1+A_2^*A_2)U(B_1B_1^*+B_2B_2^*)(B_1B_1^*+B_2B_2^*)^{(1)}$$

其中 $U\in Q^{n\times n}$为任意的,Y 和 Z 是下列方程组

$$\begin{cases}A_2^*A_2(A_1^*A_1+A_2^*A_2)^{(1)}Y=A_1^*A_1(A_1^*A_1+A_2^*A_2)^{(1)}A_2^*C_2B_2^*\\Y(B_1B_1^*+B_2B_2^*)^{(1)}B_1B_1^*=A_1^*C_1B_1^*(B_1B_1^*+B_2B_2^*)^{(1)}B_2B_2^*\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}A_1^*A_1(A_1^*A_1+A_2^*A_2)^{(1)}Z=A_2^*A_2(A_1^*A_1+A_2^*A_2)^{(1)}A_1^*C_1B_1^*\\Z(B_1B_1^*+B_2B_2^*)^{(1)}B_2B_2^*=A_2^*C_2B_2^*(B_1B_1^*+B_2B_2^*)^{(1)}B_1B_1^*\end{cases}$$

的任一解.

证明 由引理 2 知,相容的四元数矩阵方程

$$A_iXB_i=C_i$$

等价于其正规方程

$$A_i^*A_iXB_iB_i^*=A_i^*C_iB_i^*\qquad(17)$$

$i=1,2$. 矩阵方程组(1)的每个方程相容当且仅当(16)式成立. 而方程(17)的系数矩阵均是半正定自共轭的,故由定理 1 立得此定理的证明. □

2 Ω 上的矩阵方程组(1)

本段在任意体 Ω 上考虑矩阵方程组(1),其中 $A_1\in\Omega_r^{m\times n}$,$B_1\in\Omega_s^{l\times k}$,$A_2\in\Omega_{r_o}^{p\times n}$,$B_2\in\Omega_{s_o}^{l\times q}$,$C_1\in\Omega_r^{m\times n}$,$C_2\in\Omega^{p\times q}$.

注意到上述的 A_1 与 A_2 有相同的列数,B_1 与 B_2 有相同的行数,故可设矩阵对$[A_1,A_2]$的 DSC 与矩阵对$[B_1,B_2]$的 DSR 分解分别为

$$VA_1U=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix},$$

$$V_0A_2U=\begin{pmatrix} O & O & O & O \\ I_{r_2} & O & O & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ p-r_0 \end{matrix}, \tag{18}$$

$$PB_1Q=\begin{pmatrix} I_s & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} s \\ l-s \end{matrix},$$

$$PB_2Q_0=\begin{pmatrix} O & I_{s_2} & O \\ O & O & O \\ I_{s_1} & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} s \\ s-s_2 \\ s_1 \\ l-s-s_1 \end{matrix}, \tag{19}$$

其中 $V\in GL_m(\Omega),U\in GL_n(\Omega),V_0\in GL_p(\Omega),P\in GL_l(\Omega),Q\in GL_k(\Omega),Q_0\in GL_q(\Omega),s_0=s_1+s_2,r_1+r_2=r_0$.

矩阵方程组(1)等价于下面的矩阵方程组

$$\begin{cases} VA_1UU^{-1}XP^{-1}PB_1Q=VC_1Q \\ V_0A_2UU^{-1}XP^{-1}PB_2Q_0=V_0C_2Q_0 \end{cases}. \tag{20}$$

令

$$U^{-1}XQ^{-1}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_1 \\ r-r_1 \\ r_2 \\ m-r-r_1 \end{matrix}, \tag{21}$$
$$\begin{matrix} s_2 & s-s_2 & s_1 & l-s_1-s \end{matrix}$$

$$V_0C_2Q_0=\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} r_2 \\ r_1 \\ p-r_0 \end{matrix}, \tag{23}$$
$$\begin{matrix} s_1 & s_2 & k-s_0 \end{matrix}$$

$$VC_1Q=\overset{\begin{matrix} s & k-s \end{matrix}}{\begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{pmatrix}}\begin{matrix} r \\ m-r \end{matrix}, \tag{23}$$

$$G_1=\overset{\begin{matrix} s_2 & s-s_2 \end{matrix}}{\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}}\begin{matrix} r_1 \\ r-r_2 \end{matrix}, \tag{24}$$

则矩阵方程组(20)即为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} & O \\ O & O \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_{33} & X_{31} & O \\ X_{13} & X_{11} & O \\ O & O & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \end{cases}. \tag{25}$$

于是,(20)有解即(25)有解当且仅当 $G_i=O,i=2,3,4,E_{j3}=O,E_{3j}=O,j=1,2,3$,且 $E_{22}=C_{11}$. 由(25)还得

$X_{11}=C_{11},X_{12}=C_{12},X_{21}=C_{21},X_{22}=C_{22},X_{33}=E_{11},X_{31}=E_{12},$

$X_{13}=E_{21},X_{11}=E_{22}=C_{11}.$

于是有下面的

定理 3　对于矩阵方程组(1),设$[A_1,A_2]$的 DSC 分解和$[B_1,B_2]$的 DSR 分解分别为(18)及(19)式,$V_0C_2Q_0$,VC_1Q 及 G_1 分别为(22)、(23)和(24)式,则(1)有解的充要条件为

$C_{11}=E_{22},G_2,G_3,G_4,E_{i3}$与 $E_{3i}(i=1,2,3)$皆为零矩阵.

有解时,其一般解可表为

$$X=U\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & E_{21} & X_{14} \\ C_{21} & C_{22} & X_{23} & X_{24} \\ E_{12} & X_{32} & E_{11} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{bmatrix}P$$

其中,$X_{14}\in\Omega^{r_1\times(l-s-s_1)}$,$X_{23}\in\Omega^{(r-r_2)\times s_1}$,$X_{24}\in\Omega^{(r-r_1)\times(l-s-s_1)}$,$X_{32}\in$

$\Omega^{r_2\times(s-s_2)}, X_{34}\in\Omega^{r_2\times(l-s-s_1)}, X_{41}\in\Omega^{(n-r-r_1)\times s_2}, X_{42}\in\Omega^{(n-r-r_1)\times(s-s_2)}$, $X_{43}\in\Omega^{(n-r-r_1)\times s_1}, X_{44}\in\Omega^{(n-r-r_1)\times(l-s-s_1)}$为任意的矩阵.

3 单 Artinian 环上的矩阵方程组(1)

设 R 是一个单 Artinian 环,记

$$R(A)=\{AX \mid A\in R^{m\times n}, X\in R^{n\times 1}\},$$

$$\mu(A)=\{XA \mid A\in R^{m\times n}, X\in R^{1\times m}\},$$

由 Wedderburn－Artinian 定理知,R 与除环 Ω 上的全矩阵环 $\Omega^{s\times s}$ 同构. 为了以下方便,我们把 R 上的矩阵 A 的 Ω 表示记为 A^{Ω}, $A^{(1)}$的 Ω 表示记不 $A^{(\Omega)}$,

本段在 R 上考虑矩阵方程组(1),其中,$A_1\in R_{r_1}^{p_1\times r}, A_2\in R_{r_2}^{p_2\times r}, B_1\in R_{r_3}^{t\times q_1}, B_2\in R_{r_4}^{t\times q_2}, C_1\in R^{p_1\times q_1}, C_2\in R^{p_2\times q_2}$,给出(1)可解的两个充要条件.

定理 4 R 上的矩阵方程组(1)可解当且仅当(1)中的每个方程可解,且

$$AA_1^{(1)}C_1B_1{}^{(1)}B=AA_2^{(1)}C_2B_2{}^{(1)}B_2 \tag{25}$$

其中 $B_1^{(1)}, B_2{}^{(1)}, A_1^{(1)}$ 和 $A_2{}^{(1)}$是任一固定的广义逆,B 与 A 满足

$$\left.\begin{array}{l}\mu(A)=\mu(A_1)\cap\mu(A_2)\\ R(B)=R(B_1)\cap R(B_2)\end{array}\right\}. \tag{26}$$

证明 考虑矩阵方程组(1)的 Ω 表示

$$\begin{cases}A_1^{\Omega}XB_1^{\Omega}=C_1{}^{\Omega}\\ A_2^{\Omega}XB_2^{\Omega}=C_2{}^{\Omega}\end{cases}. \tag{27}$$

显然,(1)在 R 上相容当且仅当(27)在 Ω 上可解. 由(26)可得

$$\mu(A^{\Omega})=\mu(A_1{}^{\Omega})\cap\mu(A_2{}^{\Omega})$$

$$R(B^{\Omega})=R(B_1{}^{\Omega})\cap R(B_2{}^{\Omega}).$$

于是,有子空间 V 和 W 使得

$$\mu(A_2{}^{\Omega})=\mu(A^{\Omega})\oplus V$$

$$R(B_2^{\Omega})=R(B^{\Omega})\oplus W.$$

此时，

$$\mu(A_1^{\Omega})\cap W=\{0\}$$
$$R(B_2^{\Omega})\cap V=\{0\}.$$

从而有幂等阵 P^{Ω} 和 Q^{Ω} 使得

$$A_1^{\Omega}P^{\Omega}=A_1^{\Omega},Q^{\Omega}B_1^{\Omega}=B_1^{\Omega}. \tag{28}$$

可验知，

$$\mu(A_2^{\Omega}P^{\Omega})\subset\mu(A^{\Omega}),$$
$$R(Q^{\Omega}B_2^{\Omega})\subset R(B^{\Omega}).$$

从而有 E 和 D 使得

$$EA^{\Omega}=A_2^{\Omega}P^{\triangle},B^{\Omega}D=Q^{\Omega}B_2^{\Omega}. \tag{29}$$

因

$$\mu(A^{\Omega})\subset\mu(A_i^{\Omega}),R(B^{\Omega})\subset R(B_i^{\Omega}),(i=1,2),$$

故有 Ω 上的矩阵 M_i 和 N_i，使

$$M_iA_i^{\Omega}=A^{\Omega},B_i^{\Omega}N_i=B^{\Omega},(i=1,2) \tag{30}$$

如果(27)有解 X_0，则由(30)式可验知，

$$\begin{aligned}A^{\Omega}A_1^{(\Omega)}C_1^{\Omega}B_1^{(\Omega)}B^{\Omega}&=A^{\Omega}A_1^{(\Omega)}A_1^{\Omega}X_0B_1^{\Omega}B_1^{(\Omega)}B^{\Omega}\\&=A^{\Omega}X_0B^{\Omega}\\A^{\Omega}A_2^{(\Omega)}C_2^{\Omega}B_2^{(\Omega)}B^{\Omega}&=A^{\Omega}A_2^{(\Omega)}A_2^{\Omega}X_0B_2^{\Omega}B_2^{(\Omega)}B^{\Omega}\\&=A^{\Omega}X_0B^{\Omega}\end{aligned}$$

故

$$A^{\Omega}A_1^{(\Omega)}C_1^{(\Omega)}B_1^{(\Omega)}B^{\Omega}=A^{\Omega}A_2^{(\Omega)}C_2^{\Omega}B_2^{(\Omega)}B^{\Omega}. \tag{31}$$

反之，若(31)成立且(27)中每个方程可解，则由第二章§3定理 6 及(28)和(29)可验知

$$A_2^{(\Omega)}C_2^{\Omega}B_2^{(\Omega)}+P^{\Omega}(A_1^{(\Omega)}C_1^{\Omega}B_1^{(\Omega)}-A_2^{(\Omega)}C_2^{\Omega}B_2^{(\Omega)})Q^{\Omega}$$

是(27)的一个解．□

定理 5　R 上的矩阵方程组(1)相容的充要条件是

$$\operatorname{rank}A_i=\operatorname{rank}(A_i,C_i),\operatorname{rank}B_i=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}B_i\\C_i\end{pmatrix}(i=1,2) \tag{32}$$

且

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A_1 & O & O\\A_2 & O & O\\O & B_1 & B_2\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A_1 & C_1 & O\\A_2 & O & -C_2\\O & B_1 & B_2\end{bmatrix}. \tag{33}$$

证明 设(1)有解 X,则由第二章§3定理4立得(32)式．又

$$\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}(XB_1,O)+\begin{pmatrix}O\\-A_2X\end{pmatrix}(B_1,B_2)=\begin{pmatrix}C_1 & O\\O & -C_2\end{pmatrix},$$

故由第二章§6定理6得(33)式成立．

反之,设(32)及(33)均成立．矩阵方程组(1)在 R 上可解当且仅当(27)在 Ω 上可解．下面考虑(27),其中 $A_1{}^{\Omega}\in\Omega^{p_1s\times rs}$,$A_2{}^{\Omega}\in\Omega^{p_2s\times rs}$,$B_1{}^{\Omega}\in\Omega^{ts\times q_1s}$,$B_2{}^{\Omega}\in\Omega^{ts\times q_2s}$,$C_1{}^{\Omega}\in\Omega^{p_1s\times q_1s}$,和 $C_2{}^{\Omega}\in\Omega^{p_2s\times q_2s}$.

对于 $A_i{}^{\Omega}$ 和 $B_i^{\Omega}(i=1,2)$,存在 Ω 上的可逆阵 M_i 和 $N_i(i=1,2)$使得

$$\begin{cases}M_1A_1{}^{\Omega}=\begin{pmatrix}\hat{A}_1\\O\end{pmatrix}\\M_2A_2^{\Omega}=\begin{pmatrix}\hat{A}_2\\O\end{pmatrix},\\B_1{}^{\Omega}N_1=(\hat{B}_1,O)\\B_2{}^{\Omega}N_2=(\hat{B}_2,O)\end{cases} \tag{34}$$

其中,$\hat{A}_1\in\Omega_{k_1s}^{k_1s\times rs}$,$\hat{A}_2\in\Omega_{k_2s}^{k_2s\times rs}$,$\hat{B}_1\in\Omega_{l_1s}^{ts\times l_1s}$,$\hat{B}_2\in\Omega_{l_2s}^{ts\times l_2s}$. 令

$$\begin{cases}\hat{C}_1=M_1C_1{}^{\Omega}N_1=\overset{\displaystyle l_1s}{\begin{pmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\\hat{A}_{13} & \hat{A}_{14}\end{pmatrix}}\begin{matrix}k_1s\\\\\end{matrix},\\\hat{C}_2=M_2C_2{}^{\Omega}N_2=\overset{\displaystyle l_2s}{\begin{pmatrix}\hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\\\hat{A}_{23} & \hat{A}_{24}\end{pmatrix}}\begin{matrix}k_2s\\\\\end{matrix},\end{cases} \tag{35}$$

$$\hat{A}_1 = L_1U_1, \hat{A}_2 = L_2U_2, \hat{B}_1 = V_1R_1, \hat{B}_2 = V_2R_2, \tag{36}$$

其中 L_i 与 R_i 均可逆，U_i 与 V_i 分别是行满秩与列满秩阵，$i=1,2$. 记

$$W_1 = L_1^{-1}\hat{A}_{11}R_1^{-1}, W_2 = L_2^{-1}\hat{A}_{21}R_2^{-1}. \tag{37}$$

由(32)得(27)中的每个方程均相容．由(34)和(35)可得 $\hat{A}_{i2}, \hat{A}_{i3}$ 及 $\hat{A}_{i4}(i=1,2)$ 均为零矩阵．故可由(32)～(37)及第二章§6定理6得，存在 Ω 上的矩阵 Z_1, Z_2 及 $X_1 \in \Omega^{rs\times l_1s}, X_2 \in \Omega^{rs\times l_2s}, Y_1 \in \Omega^{k_1s\times ts}$，及 $Y_2 \in \Omega^{k_2s\times ts}$，使得

$$\begin{cases} U_1Z_1V_1 = W_1 \\ U_2Z_2V_2 = W_2 \end{cases} \tag{38}$$

及

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}(X_1, X_2) + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}(V_1, V_2) = \begin{pmatrix} W_1 & O \\ O & -W_2 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

对于$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$及$(V_1, V_2)$，存在 $M \in GL_{rs}(\Omega)$ 及 $N \in GL_{ts}(\Omega)$ 使

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \overset{ts}{U_{11}} & O \\ U_{21} & O \end{pmatrix} k_1s, \quad N(V_1, V_2) = \begin{pmatrix} \overset{l_1s}{V_{11}} & \overset{l_{2s}}{V_{21}} \\ O & O \end{pmatrix} ds, \tag{40}$$

其中$\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix}$与$(V_{11}, V_{21})$分别是列满秩与行满秩阵. 令

$$\begin{cases} M^{-1}(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} \overset{l_1s}{\widetilde{X}_1} & \overset{l_2s}{\widetilde{X}_2} \\ \widetilde{X}_3 & \widetilde{X}_4 \end{pmatrix} ms, \\ \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} N^{-1} = \begin{pmatrix} \overset{ds}{\widetilde{Y}_1} & \overset{ds}{\widetilde{Y}_3} \\ \widetilde{Y}_2 & \widetilde{Y}_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} k_1s \\ k_2s \end{matrix}, \end{cases} \tag{41}$$

则由(39)、(40)及(41)式得

$$\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix}(\widetilde{X}_1, \widetilde{X}_2), + \begin{pmatrix} \widetilde{Y}_1 \\ \widetilde{Y}_2 \end{pmatrix}(V_{11}, V_{21}) = \begin{pmatrix} W_1 & O \\ O & -W_2 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

设

$$M^{-1}Z_1N^{-1} = \overset{ds}{\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{13} & Z_{14} \end{pmatrix}}{}^{us},$$

$$M^{-1}Z_2N^{-1} = \underset{ds}{\begin{pmatrix} Z_{21} & Z_{22} \\ Z_{23} & Z_{24} \end{pmatrix}}{}^{us},$$

由(38)式得

$$\begin{cases} U_{11}Z_{11}V_{11} = W_1 \\ U_{21}Z_{21}V_{21} = W_2 \end{cases}. \quad (43)$$

由 $\hat{A}_{ij} = O, (i=1,2,;j=2,3,4)$ 及(34)～(37)与(40)式可验知，如果能求出矩阵方程组

$$\begin{cases} U_{11}XV_{11} = W_1 \\ U_{21}XV_{21} = W_2 \end{cases}$$

的解 X_0，则

$$M\begin{pmatrix} X_0 & O \\ O & O \end{pmatrix}N$$

即是(27)的解.

令

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}Q, \\ (V_{11}, V_{21}) = G(Q_1, Q_2), \end{cases} \quad (44)$$

其中 $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ 与 (Q_1, Q_2) 分别是列满秩与行满秩阵，Q 与 G 均可逆. 从

而存在 Ω 上的矩阵$\begin{pmatrix}T_1\\T_2\end{pmatrix}$与$(S_1,S_2)$使得

$$\begin{pmatrix}P_1 & T_1\\ P_2 & T_2\end{pmatrix}\text{及}\begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\\ S_1 & S_2\end{pmatrix}$$

皆可逆. 令

$$\begin{pmatrix}\widetilde{T}_1 & \widetilde{T}_2\\ \widetilde{P}_1 & \widetilde{P}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1 & T_1\\ P_2 & T_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1 & T_1\\ P_2 & T_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{T}_1 & \widetilde{T}_2\\ \widetilde{P}_1 & \widetilde{P}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & O\\ O & I\end{pmatrix} \tag{45}$$

及

$$\begin{pmatrix}\widetilde{S}_1 & \widetilde{Q}_1\\ \widetilde{S}_2 & \widetilde{Q}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\\ S_1 & S_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_1 & Q_2\\ S_1 & S_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{S}_1 & \widetilde{Q}_1\\ \widetilde{S}_2 & \widetilde{Q}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & O\\ O & I\end{pmatrix}. \tag{46}$$

由(44)式得

$$U_{11}=P_1Q,U_{21}=P_2Q \tag{47}$$

及

$$V_{11}=GQ_1,V_{21}=GQ_2. \tag{48}$$

由(36)及(40)得,存在 Ω 上的矩阵 $\widetilde{U}_{11},\widetilde{U}_{21},\widetilde{V}_{11}$,和 $\widetilde{V}_{21}$使

$$U_{11}\widetilde{U}_{11}=I,U_{21}\widetilde{U}_{21}=I, \tag{49}$$

$$\widetilde{V}_{11}V_{11}=I,\widetilde{V}_{21}V_{21}=I. \tag{50}$$

记

$$\hat{P}_1=Q\widetilde{U}_{11},\hat{P}_2=Q\widetilde{U}_{21},\hat{Q}_1=\hat{V}_{11}G,\hat{Q}_2=\hat{V}_{21}G,$$

则可由(47)及(48)式得

$$P_1\hat{P}_1=I,P_2\hat{P}_2=I, \tag{51}$$

$$\hat{Q}_1Q_1=I,\hat{Q}_2Q_2=I. \tag{52}$$

令

$$\widetilde{X}=\widetilde{X}_1\widetilde{S}_1+\widetilde{X}_2\widetilde{S}_2, \tag{53}$$

$$\widetilde{Y}=\widetilde{T}_1\widetilde{Y}_1+\widetilde{T}_1\widetilde{Y}_2 \tag{54}$$

$$\hat{X}=\widetilde{X}_1\widetilde{Q}_1+\widetilde{X}_2\widetilde{Q}_2, \tag{55}$$

$$\hat{Y}=\widetilde{P}_1\widetilde{Y}_1+\widetilde{P}_2\widetilde{Y}_2, \tag{56}$$

$$Z=Z_{11}-Z_{21}, \tag{57}$$

用$\begin{pmatrix}\widetilde{T}_1 & \widetilde{T}_2\\ \widetilde{P}_1 & \widetilde{P}_2\end{pmatrix}$左乘(42),用$\begin{pmatrix}\widetilde{S}_1 & \widetilde{Q}_1\\ \widetilde{S}_2 & \widetilde{Q}_2\end{pmatrix}$右乘(42),并由(43)～(48)及(53)～(57)可得下面的等式:

$$Q\hat{X}+\hat{Y}G=\widetilde{T}_1P_1QZ_{11}GQ_1\widetilde{S}_1-\widetilde{T}_2P_2QZ_{21}GQ_2\widetilde{S}_2, \tag{58}$$

$$Q\hat{X}=\widetilde{T}_1P_1QZ_{11}GQ_1\widetilde{Q}_1-\widetilde{T}_2P_2QZ_{21}GQ_2\widetilde{Q}_2, \tag{59}$$

$$\hat{Y}G=\widetilde{P}_1P_1QZ_{11}GQ_1\widetilde{S}_1-\widetilde{P}_2P_2QZ_{21}GQ_2\widetilde{S}_2, \tag{60}$$

$$O=\widetilde{P}_1P_1QZGQ_1\widetilde{Q}_1=\widetilde{P}_2P_2QZGQ_2\widetilde{Q}_2. \tag{61}$$

设

$$\begin{aligned}X_0=&Z_{11}+(Z_{11}GQ_1\widetilde{Q}_1-\hat{X})(S_2-S_1\widetilde{Q}_1Q_2)\widetilde{V}_{21}\\&+\widetilde{U}_{21}(T_2-P_2\hat{P}_1T_1)(\widetilde{P}_1P_1QZ_{11}-\hat{Y}\\&+(\widetilde{U}_{11}U_{11}-I)(\hat{X}-Z_{11}GQ_1\widetilde{S}_1)(I-Q_1\hat{Q}_1)Q_2\widetilde{V}_{21}\\&+\widetilde{U}_{21}P_2(\hat{P}_1P_1-I)(\hat{Y}+\widetilde{T}_2P_2QZ_{11})(I-V_{11}\widetilde{V}_{11}).\end{aligned} \tag{62}$$

下证 X_0是下列方程的一个公共解:

$$U_{11}XV_{11}=W_1, \tag{63}$$

$$U_{21}XV_{21}=W_2. \tag{64}$$

由(47)与(48)知,

$$U_{11}X_0V_{11}=P_1QX_0GQ_1.$$

由(59)、(45)及(61)知,

$$\begin{aligned}P_1Q(Z_{11}GQ_1\widetilde{Q}_1-\hat{X})&=P_1\widetilde{T}_2P_2QZGQ_1\widetilde{Q}_1\\&=T_1\widetilde{P}_2P_2QZQ_2\widetilde{Q}_2\\&=O.\end{aligned}$$

由(60)、(46)及(61),得

$$\begin{aligned}(\widetilde{P}_1P_1QZ_{11}-\hat{Y})GQ_1&=\widetilde{P}_1P_1QZGQ_1\widetilde{Q}_1S_1\\&=\widetilde{P}_1P_1QZGQ_2\widetilde{S}_2Q_1\\&=O.\end{aligned}$$

由(49)得,

$$U_{11}(\widetilde{U}_{11}U_{11}-I)=O.$$

由(50)得,

$$(I-V_{11}\widetilde{V}_{11})V_{11}=O.$$

再由(43)即得

$$U_{11}X_0V_{11}=U_{11}Z_{11}V_{11}=W_1.$$

故(62)中的 X_0满足(63). 由(47)、(48)知,

$$U_{21}X_0V_{21}=P_2QX_0GQ_2.$$

由(47)、(50)、(59)及(46)可得

$$\begin{aligned}&U_{21}(Z_{11}GQ_1\widetilde{Q}_1-\widetilde{X})(S_2-S_1\hat{Q}_1Q_2)\widetilde{V}_{21}V_{21}\\&=P_2(\widetilde{T}_2P_2QZGQ_1\widetilde{Q}_1)(S_2-S_1\hat{Q}_1Q_2)\\&=P_2(-\widetilde{T}_2P_2QZGQ_1\widetilde{S}_1-\widetilde{T}_2P_2QZGQ_1\hat{Q}_1\\&\quad+\widetilde{T}_2P_2QZGQ_1\widetilde{S}_1Q_1\hat{Q}_1)Q_2.\end{aligned}$$

由(49)、(48)、(60)及(45)可得,

$$\begin{aligned}&U_{21}\widetilde{U}_{21}(T_2-P_2\hat{P}_1T_1)(\widetilde{P}_1P_1QZ_{11}-\hat{Y})V_{21}\\&=(T_2-P_2\hat{P}_1T_1)(\widetilde{P}_1P_1QZ_{11}-\hat{Y})GQ_2\\&=(T_2-P_2\hat{P}_1T_1)(\widetilde{P}_1P_1QZ_{11}-\hat{Y})GQ_2\\&=(T_2-P_2\hat{P}_1T_1)(\widetilde{P}_1P_1QZGQ_2\widetilde{S}_2)Q_2\\&=P_2(-\widetilde{T}_1P_1QZGQ_2\widetilde{S}_2-\hat{P}_1P_1QZGQ_2\widetilde{S}_2+\hat{P}_1P_1\widetilde{T}_1QZGQ_2\widetilde{S}_2)Q_2.\end{aligned}$$

由(58),(45),(46)及(49)～(52)可得

$$\begin{aligned}&U_{21}(\widetilde{U}_{11}U_{11}-I)(\widetilde{X}-Z_{11}GQ_1\widetilde{S}_1)(I-Q_1\hat{Q}_1)Q_2\widetilde{V}_{21}V_{21}\\&+U_{21}\widetilde{U}_{21}P_2(\hat{P}_1P_1-I)(\widetilde{Y}+\widetilde{T}_2P_2QZ_{11})(I-V_{11}\widetilde{V}_{11})V_{21}\\&=P_2\{(\hat{P}_1P_1-I)[Q(\widetilde{X}-Z_{11}GQ_1\widetilde{S}_1)+(\widetilde{Y}+\widetilde{T}_2P_2QZ_{11})G](I-\\&Q_1\widetilde{Q}_1)\}Q_2\\&=P_2[(\hat{P}_1P_1-I)(\widetilde{T}_2P_2QZQQ_2\widetilde{S}_2)(I-Q_1\widetilde{Q}_1)]Q_2.\end{aligned}$$

从而,再反复利用(45)、(46)、(61),并由(43)可得

$$\begin{aligned}U_{21}X_0V_{21}&=U_{21}(Z_{11}-Z)V_{21}\\&=U_{21}Z_{21}V_{21}\\&=W_2.\end{aligned}$$

故 X_0是(64)的解. 由(40)得

$$X=M\begin{pmatrix} X_0 & O \\ O & O \end{pmatrix}N$$

是

$$\begin{cases} U_1XV_1=W_1 \\ U_2XV_2=W_2 \end{cases} \tag{65}$$

的解. 利用 $\hat{A}_{i2},\hat{A}_{i3},\hat{A}_{i4},(i=1,2)$均为零矩阵及(34)～(36)及(40)知,(65)意味着 X 是(27)的解. □

4 主理想环上的矩阵方程组(1)

本段在主理想环 R 上考虑矩阵方程组(1),其中 $C_1\in R^{p_1\times q_1}$, $C_2\in R^{p_2\times q_2}, A_1\in R^{p_1\times r}, A_2\in R^{p_2\times r}, B_1\in R^{s\times q_1}$,及 $B_2\in R^{s\times q_2}$,

设 $M_1\in R^{p_1\times p_1}, M_1\in R^{p_2\times p_2}, N_1\in R^{q_1\times q_1}, N_2\in R^{q_2\times q_2}$是幺模阵且使得

$$M_1A_1=\begin{pmatrix}\hat{A}_1\\ O\end{pmatrix}, M_2A_2=\begin{pmatrix}\hat{A}_2\\ O\end{pmatrix},$$

$$B_1N_1=(\hat{B}_1,O), B_2N_2=(\hat{B}_2,O), \tag{66}$$

其中 $\hat{A}_1\in R_{k_1}^{k_1\times r}, \hat{A}_2\in R_{k_2}^{k_2\times r}, \hat{B}_1\in R_{l_1}^{s\times l_1}, \hat{B}_2\in R_{l_2}^{s\times l_2}$. 令

$$\hat{C}_1=M_1C_1N_1=\begin{pmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ \hat{A}_{13} & \hat{A}_{14}\end{pmatrix}, \hat{C}_2=M_2C_2N_2=\begin{pmatrix}\hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\\ \hat{A}_{23} & \hat{A}_{24}\end{pmatrix} \tag{67}$$

其中,$\hat{A}_{11}\in R^{k_1\times l_1}, \hat{A}_{21}\in R^{k_2\times l_2}$,并设 L_1,L_2分别是 $\hat{A}_1,\hat{A}_2$的最大左因子,R_1,R_2分别是 $\hat{B}_1,\hat{B}_2$的最大右因子,且满足

$$\hat{A}_1=L_1U_1, \hat{A}_2=L_2U_2, \hat{B}_1=V_1R_1, \hat{B}_2=V_2R_2 \tag{68}$$

其中 U_1,U_2是左幺模阵,V_1,V_2是右幺模阵.

令

$$W_1=L_1^{-1}\hat{A}_{11}R_1^{-1}, W_2=L_2^{-1}\hat{A}_{21}R_2^{-1}. \tag{69}$$

则由(66)～(69)式及第二章§3定理5及主理想环上的 Roth 等价定理,采用类似于单 Artinian 环上矩阵方程(1)关于定理5的证明手段,即可证得

定理6　主理想环 R 上矩阵方程(1)有解的充要条件是以下几条皆成立：

(i)　$\hat{A}_{i2}=O,\hat{A}_{i3}=O,\hat{A}_{i4}=O,i=1,2.$

(ii)　$W_i\in R^{k_i\times l_i},i=1,2.$

(iii)　存在 $X_1\in R^{r\times l_1},X_2\in R^{r\times l_2},Y_1\in R^{k_1\times s}$ 及 $Y_2\in R^{k_2\times s}$ 使得

$$\begin{pmatrix}U_1\\U_2\end{pmatrix}(X_1,X_2)+\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}(V_1,V_2)=\begin{pmatrix}W_1 & O\\O & -W_2\end{pmatrix}.$$

§3　体上的矩阵方程组 $[A^*XA,B^*XB]=[C,D]$

本节研究体上的矩阵方程组

$$\begin{cases}A^*XA=C\\B^*XB=D\end{cases}. \tag{1}$$

在具有对合反自同构的体 K 上给出(1)有自共轭解、在实四元数体 Q 上给出(1)有(斜)亚(半)正定解的充要条件及其解集结构，最后给出(1)在实数域上的最小二乘对称解集.

1　K 上矩阵方程组(1)的自共轭解

考虑矩阵方程组(1)，其中 $A\in K_r^{m\times n},B\in K_{r_0}^{m\times n},C\in K^{n\times n},D\in K^{n\times n}$.

设矩阵对 $[A,B]$ 的 DSR 分解为

$$PAQ=\begin{pmatrix}I_r & O\\O & O\end{pmatrix},PBQ_0=\begin{pmatrix}O & I_{r_2} & O\\O & O & O\\I_{r_1} & O & O\\O & O & O\end{pmatrix}\begin{matrix}r_2\\r-r_2\\r_1\\m-r-r_1\end{matrix}, \tag{2}$$

其中，$r_1+r_2=r_0,P\in GL_m(K),Q,Q_0,\in GL_n(K)$.

求矩阵方程组(1)的自共轭解等价于解

$$\begin{cases} A^* XA = C \\ B^* XB = D \\ X^* = X \end{cases} \tag{3}$$

而(3)等价于

$$\begin{cases} Q^* A^* P^* P^{-*} XP^{-1} PAQ = Q^* CQ \\ Q_0^* B^* P^* P^{-*} XP^{-1} PBQ_0 = Q_0^* DQ_0 \\ X^* = X \end{cases} \tag{4}$$

设

$$P^{-*} XP^{-1} = \begin{array}{c} \begin{matrix} r_2 & r-r_2 & r_1 & m-r-r_1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{12}^* & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{13}^* & X_{23}^* & X_{23} & X_{34} \\ X_{14}^* & X_{24}^* & X_{34}^* & X_{44} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} r_2 \\ r-r_2 \\ r_1 \\ m-r-r_1 \end{matrix},$$

$$Q^* CQ = \begin{array}{c} \begin{matrix} n & n-r \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2^* & C_3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}, \tag{5}$$

$$C_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} r_2 & n-r_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}^* & C_{22} \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} r \\ r-r_2 \end{matrix}, \tag{6}$$

$$Q_0^* DQ_0 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12}^* & D_{22} & D_{23} \\ D_{13}^* & D_{23}^* & D_{33} \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} r_1 & r_2 & n-r_0 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ n-r_0 \end{matrix}. \tag{7}$$

将(2)代入(4),得

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & X_{22} \end{pmatrix} & O \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_2^* & C_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} X_{33} & X_{13}^* & O \\ X_{13} & X_{11} & O \\ O & O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12}^* & D_{22} & D_{23} \\ D_{13}^* & D_{23}^* & D_{33} \end{pmatrix}.$$

从而 $C_2=O, C_3=O, D_{i3}=O, i=1,2,3, D_{22}=C_{11}, X_{12}=C_{12}, X_{22}=C_{22}, X_{13}=D_{12}^*, X_{33}=D_{11}$. 于是有下面的

定理1 设矩阵方程组(1)中的矩阵对〔A,B〕的 DSR 分解为(2)式,Q^*CQ,C_1及 $Q_0{}^*DQ_0$分别为(5),(6)和(7),则(1)有自共轭解的充要条件是 $D_{22}=C_{11}, C_2=O, C_3=O, D_{i3}=O, i=1,2,3$.

有此种解时,其通解为

$$X=P^*\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & D_{12}^* & X_{14} \\ C_{12}^* & C_{22} & X_{23} & X_{24} \\ D_{12} & X_{23}^* & D_{11} & X_{34} \\ X_{14}^* & X_{24}^* & X_{34}^* & X_{44} \end{pmatrix}P.$$

其中,$X_{14}\in K^{r_2\times(m-r-r_1)}, X_{23}\in K^{(r-r_2)\times r_1}, X_{24}\in K^{(r-r_2)\times(m-r-r_1)}$, $X_{34}\in K^{r_1\times(m-r-r_1)}, X_{44}\in SC_{m-r-r_1}(K)$是任意的.

2 矩阵方程组(1)的(斜)亚半正定解

本段考虑矩阵方程组(1)的斜亚半正定解及亚半正定解,其中,$A\in Q_r^{m\times n_1}, B\in Q_{r_0}^{m\times n_2}, C\in Q^{n_1\times n_1}$,及 $D\in Q^{n_2\times n_2}$. 设矩阵对〔A,B〕的 DSR 分解为

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}, PBQ_0=\begin{pmatrix} O & O & O \\ O & I_{r_2} & O \\ O & O & I_{r_1} \\ O & O & O \end{pmatrix}\begin{matrix} r-r_2 \\ r_2 \\ r_1 \\ m-r-r_1 \end{matrix}, \tag{8}$$

其中 $P\in GL_m(Q), Q\in GL_{n_1}(Q), Q_0\in GL_{n_2}(Q), r_0=r_1+r_2$.

显然,矩阵方程组(1)等价于下面的矩阵方程组

$$\begin{cases} Q^{(*)}A^{(*)}P^{(*)}P^{-(*)}XP^{-1}PAQ=Q^{(*)}CQ \\ Q_0^{(*)}B^{(*)}P^{(*)}P^{-(*)}XP^{-1}PBQ_0=Q_0^{(*)}DQ_0 \end{cases}.$$

$$P^{-(*)}XP^{-1}=\begin{array}{c}\begin{matrix} r-r_2 & r_2 & r_1 & m-r-r_1\end{matrix}\\ \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14}\\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24}\\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34}\\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44}\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix} m-r-r_1\\ r_1\\ r_2\\ r-r_2\end{matrix}, \tag{9}$$

$$Q^{(*)}CQ=\begin{array}{c}\begin{matrix} r & n_1-r\end{matrix}\\ \begin{pmatrix} C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix} n_1-r\\ r\end{matrix}, \tag{10}$$

$$C_3=\begin{array}{c}\begin{matrix} r-r_2 & r_2\end{matrix}\\ \begin{pmatrix} C_{31} & C_{32}\\ C_{41} & C_{42}\end{pmatrix}\end{array}\begin{matrix} r_2\\ r-r_2\end{matrix}, \tag{11}$$

$$Q_0^{(*)}DQ_0=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13}\\ D_{21} & D_{22} & D_{23}\\ D_{31} & D_{32} & D_{33}\end{bmatrix}\\ \begin{matrix} n_2-r_0 & r_2 & r_1\end{matrix}\end{array}\begin{matrix} r_1\\ r_2\\ n_2-r_0\end{matrix}. \tag{12}$$

易证得下面的

引理1 考虑矩阵方程组(1)，设〔A,B〕的 DSR 分解为(8)，$P^{-(*)}XP$，$Q^{(*)}CQ$，C_3，$Q_0^{(*)}DQ_0$分别为(9)，(10)，(11)及(12)式，则(1)有解的充要条件为$C_i=O,(i=1,2,4)$，$D_{j1}=O$，$D_{3l}=O$，$(j=1,2,3;l=2,3)$且$D_{22}=C_{32}$. 有解时，其一般解为

$$X=P^{(*)}\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14}\\ X_{21} & D_{12} & D_{13} & X_{24}\\ C_{31} & C_{32} & D_{23} & X_{34}\\ X_{41} & C_{42} & X_{43} & X_{44}\end{bmatrix}P \tag{13}$$

其中X_{1j}，$X_{i4}(i=1,2,3,4;i=2,3,4)$，$X_{21}$，$X_{43}$分别是$Q$上的阶数由(9)式确定的任意矩阵.

定理2 在引理1的条件下，矩阵方程组(1)有斜亚半正定解的

充要条件为 $C_i=O, D_{j1}=O, D_{3l}=O, (i=1,2,4; j=1,2,3; l=2,3), D_{22}=C_{32}, C_3\in SP_r^{(*)}$ 且

$$\begin{pmatrix} D_{12} & D_{13} \\ C_{32} & D_{23} \end{pmatrix} \in SP_{r_0}^{(*)}.$$

有此种解时，其解为

$$X=P^{(*)}\begin{pmatrix} U^{(*)}(M+M^{(*)})-F^{(*)} & D+U^{(*)}MU \\ M & F \end{pmatrix}P \tag{14}$$

其中

$$M=\begin{pmatrix} X_{21} & D_{12} & D_{13} \\ C_{31} & C_{32} & D_{23} \\ C_{41} & C_{42} & X_{43} \end{pmatrix},$$

$D\in SP_{m-r-r_1}^{(*)}$, $X_{21}\in\{X_{21}\in Q^{r_1\times(r-r_2)} \mid M\in SP_{r+r_1}^{(*)}\}$；且 $F\in Q^{(r+r_1)\times(m-r-r_1)}, U\in Q^{(r+r_1)\times(m-r-r_1)}, X_{43}\in Q^{(r-r_2)\times r_1}$均为任意的.

证明 设(1)有解 $X\in SP_m^{(*)}$，则由引理1知，C_i, D_{j1}与 D_{3l}均为零阵$(i=1,2,4; j=1,2,3; l=2,3)$，$D_{22}=C_{32}$且 X 有(13)的形式. 故

$$\left(\begin{array}{ccc|c} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ \hline X_{21} & D_{12} & D_{13} & X_{24} \\ C_{31} & C_{32} & D_{23} & X_{34} \\ C_{41} & C_{42} & X_{43} & X_{44} \end{array}\right) \overset{\text{def}}{=\!=} \begin{pmatrix} G & X_{14} \\ M & F \end{pmatrix} \in SP_m^{(*)}.$$

由第一章§3定理15，M 与

$$X_{14}-U^{(*)}MU \overset{def}{=\!=} D$$

均为斜半正定矩阵，其中 U 为矩阵方程

$$(M+M^{(*)})X=G^{(*)}+F$$

的任一解. 于是，

$$G=U^{(*)}(M+M^{(*)})-F^{(*)},$$

$$X_{14}=D+U^{(*)}MU$$

且由(定理17,第一章§3)及(11)式知,$C_3 \in SP_r^{(*)}$,

$$\begin{pmatrix} D_{12} & D_{13} \\ C_{32} & D_{23} \end{pmatrix} \in SP_{r_0}^{(*)}.$$

故 X 可表成(14)的形式.

反之,若 C_i, D_{j1}, D_{3l} 皆为零阵($i=1,2,4; j=1,2,3; l=2,3$),$D_{22}=C_{32}, C_3 \in SP_r^{(*)}$,

$$\begin{pmatrix} D_{12} & D_{13} \\ C_{32} & D_{23} \end{pmatrix} \in SP_{r_0}^{(*)},$$

则由第一章§3定理15及定理17知,存在 $X_{12} \in Q^{r_1 \times (r-r_2)}$ 使(14)式为斜亚半正定阵. 易验知,具有(14)形式的 X 必为(1)的解. □

关于矩阵方程组(1)的亚半正定解可由上类似研究. 请读者自己完成.

3 矩阵方程组(1)的最小二乘对称解

本段考虑矩阵方程组(1)在实数域上的最小二乘对称解问题,其中 $A \in R^{m \times n}, B \in R^{m \times p}, C \in R^{n \times n}, D \in R^{p \times p}$. 此问题即求

$$T = \{X \in SC_m(R) \mid \|[A'XA - C, B'XB - D]\| = \text{最小}\}.$$

对于上述的 A, B,设$[A, B]$的 GSVD 为

$$A = M \sum\nolimits_A U', \quad B = M \sum\nolimits_B V', \tag{15}$$

其中 $M \in GL_m(R)$,U 和 V 分别为 $n \times n$ 和 $p \times p$ 正交阵,且

$$U = (U_1, U_2, U_3), \quad V = (V_1, V_2, V_3),$$

其中,$U_1 \in R^{n \times r}, U_2 \in R^{n \times s}, U_3 \in R^{n \times (n-r-s)}, V_1 \in R^{p \times (p+r-k)}, V_2 \in R^{p \times s}, V_3 \in R^{p \times (k-r-s)}$,

$$\sum\nolimits_A = \left[\begin{array}{ccc} I_A & & \\ & S_A & \\ & & O_A \\ \hdashline & O & \end{array}\right] \begin{array}{l} r \\ s \\ k-r-s \\ m-k \end{array}, \tag{16}$$

$$\sum_B=\begin{pmatrix} O_B & & \\ & S_B & \\ & & I_B \\ & O & \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ s \\ k-r-s \\ m-k \end{matrix}, \tag{17}$$

$k=\text{rank}(A,B)$, $r=k-\text{rank}B$, $s=\text{rank}A+\text{rank}B-k$,
$S_A=\text{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$, $S_B=\text{diag}(\beta_1,\cdots,\beta_s)$, $1>\alpha_1\geqslant\cdots\geqslant\alpha_s>0$, $0<\beta_1\leqslant\cdots\leqslant\beta_s<1$, $\alpha_i^2+\beta_i^2=1$, $i=1,\cdots,s$.

定理3 设矩阵对$[A,B]$的 GSVD 为(15)式,则

$$T=\{(M^{-1})'GM^{-1}\mid X_{13}\in R^{r\times(k-r-s)}, X_{14}\in R^{r\times(m-k)}, X_{24}\in R^{s\times(m-k)}, X_{34}\in R^{(k-r-s)\times(m-k)}, X_{44}\in SC_{m-k}(R)\} \tag{18}$$

其中,

$$G=\begin{bmatrix} G_1 & G_3 & X_{13} & X_{14} \\ G_2 & M_1 & G_5 & X_{24} \\ X'_{13} & G_4 & G_6 & X_{34} \\ X'_{14} & X'_{24} & X'_{34} & X_{44} \end{bmatrix},$$

$$G_1=\frac{1}{2}U'_1(C+C')U_1,$$

$$G_2=\frac{1}{2}S_A^{-1}U'_2(C+C')U_1,$$

$$G_3=\frac{1}{2}U'_1(C+C')U_2S_A^{-1},$$

$$G_4=\frac{1}{2}V'_3(D+D')V_2S_3^{-1},$$

$$G_5=\frac{1}{2}S_B^{-1}V'_2(C+C')V_3,$$

$$G_6=\frac{1}{2}V'_3(D+D')V_3,$$

$$M_1=\frac{1}{2}\Phi*(S_AU'_2(C+C')U_2S_A+S_BV'_2(D+D')V_2),$$

$$\Phi=(\varphi_{ij})\in R^{s\times s},\varphi_{ij}=\frac{1}{\alpha_i^2\alpha_j^2+\beta_i{}^2\beta_j^2} \quad . \tag{19}$$

证明 由(15)及 $X\in SC_m(R)$，知

$$\|[A'XA-C,B'XB-D]\|^2=\|\sum{}'_A M'XM\sum{}_A-U'CU\|^2$$
$$+\|\sum{}'_B M'XM\sum{}_B-V'DV\|^2. \tag{20}$$

令

$$U'CU=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X'_{12} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X'_{13} & X'_{23} & X_{33} & X_{34} \\ X'_{34} & X'_{24} & X'_{34} & X_{44} \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ s \\ k-r-s \\ m-k \end{matrix} \tag{21}$$
(列分块：$r \quad s \quad k-r-s \quad m-k$)

$$U'CU=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ s \\ n-r-s \end{matrix},$$
(列分块：$r \quad s \quad n-r-s$)

$$V'DV=\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}\begin{matrix} r \\ s \\ p-r-s \end{matrix}. \tag{22}$$
(列分块：$r \quad s \quad p-r-s$)

将(21)和(20)代入(20)，得

$$\|[A'XA-C,B'XB-D]\|^2$$
$$=\left\|\begin{pmatrix} X_{11}-C_{11} & X_{12}S_A-C_{12} & -C_{13} \\ S_AX'_{12}-C_{12} & S_AX_{22}S_A-C_{22} & -C_{23} \\ -C_{31} & -C_{32} & -C_{33} \end{pmatrix}\right\|^2$$
$$+\left\|\begin{pmatrix} -D_{11} & -D_{12} & -D_{13} \\ -D_{21} & S_AX_{22}S_B-D_{22} & S_BX_{23}-D_{23} \\ -D_{31} & X'_{23}S_B-D_{32} & X_{33}-D_{33} \end{pmatrix}\right\|^2 \tag{23}$$

故对任意的 $X\in T$，子矩阵 $X_{11}\in SC_r(R)$，$X_{12}\in R^{r\times s}$，$X_{22}\in SC_s(R)$，$X_{23}\in R^{s\times(k-s-r)}$ 及 $X_{33}\in SC_{k-r-s}(R)$
应满足使

$$\|X_{11}-C_{11}\|\text{最小}，\|X_{33}-D_{33}\|\text{最小}， \tag{24}$$

$$\|X_{12}S_A-C_{21}\|^2+\|S_AX'_{12}-C_{21}\|^2\text{最小}， \tag{25}$$

$$\|S_BX_{23}-D_{23}\|^2+\|X'_{23}S_B-D_{32}\|^2\text{最小}，$$

$$\|S_BX_{22}S_A-C_{22}\|^2+\|S_BX_{22}S_B-D_{22}\|^2\text{最小}. \tag{26}$$

由(24)和(25)得

$$X_{11}=\frac{1}{2}(C_{11}+C'_{11})，X_{33}=\frac{1}{2}(D_{33}+D'_{33})， \tag{27}$$

$$X_{12}=\frac{1}{2}(C_{12}+C'_{21})S_A^{-1}，X_{23}=\frac{1}{2}S_B^{-1}(D_{23}+D'_{32}). \tag{28}$$

对于(26)，应用第二章 § 14引理1，得

$$X_{22}=\frac{1}{2}\Phi*[S_A(C_{22}+C'_{22})S_A+S_B(D_{22}+D'_{22})S_B]， \tag{29}$$

其中 Φ 由(19)式所定义.

所以，T 的表达式(18)可由(27)，(28)及(29)式得到. □

§ 4 二元矩阵方程组 $(AX+BY,BX+AY)=(C,D)$

本节研究一类系数矩阵相互交错的二元复矩阵方程组

$$\begin{cases}AX+BY=C\\BX+AY=D\end{cases} \tag{1}$$

给出(1)有解的充要条件和适当定义的最优近似解，并给出一个应用背景的实例[120].

本节在复数域 C 上讨论.

1 (1)相容的充要条件

定理1 设 $A,B,C\in C^{n\times n}$，$A+B$ 与 $A-B$ 都可逆，则矩阵方

程组(1)有唯一解.

证明 矩阵方程组(1)等价于

$$\begin{cases}(A+B)(X+Y)=C+D\\(A-B)(X-Y)=C-D\end{cases}.$$

因 $A+B$ 与 $A-B$ 均可逆,故

$$\begin{cases}X+Y=(A+B)^{-1}(C+D)\\X-Y=(A-B)^{-1}(C-D)\end{cases}.$$

从而

$$\begin{cases}X=\dfrac{1}{2}[(A+B)^{-1}(C+D)+(A-B)^{-1}(C-D)]\\Y=\dfrac{1}{2}[(A+B)^{-1}(C+D)-(A-B)^{-1}(C-D)]\end{cases}\tag{3}$$

是(1)的唯一解. □

推论1 设 A^k 按 Cearo 或 Euler 收敛于 O,则

$$\begin{cases}X+AY=C\\AX+Y=D\end{cases}.$$

证明 在所设条件下,$I+A$ 和 $I-A$ 都是可逆的(见[117]).

定理2 设 A 可逆,$\|\cdot\|$是乘性矩阵范数使得

$$\|B\|<\|A^{-1}\|^{-1}.\tag{4}$$

则矩阵方程组(1)有唯一解.

证明 注意到

$$A+B=A(I+A^{-1}B).$$

而对任一正整数 k 都有

$$\begin{aligned}\|(A^{-1}B)^k\|&\leqslant\|A^{-1}\|^k\|B\|^k\\&=(\|A^{-1}\|\|B\|)^k.\end{aligned}$$

由(4)知,

$$\|A^{-1}\|\|B\|<1.$$

因此,

$$\lim_{k\to\infty}\|(A^{-1}B)^k\|=0.$$

于是，

$$\lim_{k\to\infty}(A^{-1}B)^k=0.$$

从而

$$A+B=A(I+A^{-1}B)$$

可逆. 由定理1即知(1)有唯一解. □

现在设 $A,B\in C^{m\times n}$, $X,Y\in C^{n\times l}$, $C,D\in C^{m\times l}$.

定理3 若 X 和 Y 是未知矩阵，则(1)有解的充要条件是存在某个 $(A+B)^{(1)}$ 和某个 $(A-B)^{(1)}$ 使

$$\begin{cases}(A+B)(A+B)^{(1)}(C+D)=C+D\\(A-B)(A-B)^{(1)}(C-D)=C-D\end{cases}\tag{5}$$

证明 已知(1)等价于(2). 令

$$U=X+Y, V=X-Y,$$

则(2)有解的充要条件为

$$(A+B)U=C+D\tag{6}$$

和

$$(A-B)V=C-D\tag{7}$$

各自有解. 而(6)有解当且仅当对于某个 $(A+B)^{(1)}$，(5)的第一式成立；(7)有解当且仅当对于某个 $(A-B)^{(1)}$，(5)的第二式成立. 若 U_0 为(6)的一个解，V_0 为(7)的一个解，则

$$\begin{cases}X_0=\dfrac{1}{2}(U_0-V_0),\\Y_0=\dfrac{1}{2}(U_0-V_0)\end{cases}$$

便是(1)的解；反之，若 (X_0,Y_0) 是(1)的解，则

$$\begin{cases}U_0=X_0+Y_0\\V_0=X_0-Y_0\end{cases},$$

即是(2)的解.

不难证明，(5)中的$(\cdot)^{(1)}$可用任何$\{1\}$逆取代. 特别，可将(5)写成

$$\begin{cases}(A+B)(A+B)^{+}(C+D)=C+D\\(A-B)(A-B)^{+}(C-D)=C-D\end{cases}\tag{5'}$$

而不失一般性.

定理4 若(1)中的A,B满足

$$AB^{*}=O, B^{*}A=O,\tag{8}$$

则(1)有解的充要条件是

$$\begin{cases}(AA^{+}+BB^{+})C=C\\(AA^{+}+BB^{+})D=D\end{cases}.\tag{9}$$

证明 易知(9)等价于

$$\begin{cases}(AA^{+}+BB^{+})(C+D)=C+D\\(AA^{+}+BB^{+})(C-D)=C-D\end{cases}.\tag{10}$$

由于

$$AB^{+}=AB^{+}BB^{+}=A(B^{+}B)^{*}B^{+}=AB^{*}(B^{+})^{*}B^{+}$$

$$BA^{+}=BA^{+}AA^{+}=B(A^{+}A)^{*}A^{+}=BA^{*}(A^{+})^{*}A^{+},$$

从$AB^{*}=O$又知$BA^{*}=O$. 故$AB^{+}=O, BA^{+}=O$. 又当(8)成立时有

$$(A+B)^{+}=A^{+}+B^{+}\text{[118],[119]}.\tag{11}$$

从而，

$$(A+B)(A+B)^{+}=(A+B)(A^{+}+B^{+})$$
$$=AA^{+}+BB^{+}.$$

(8)式又蕴含

$$A(-B)^{*}=O, (-B)^{*}A=O$$

使得

$$(A-B)^{+}=A^{+}-B^{+}.$$

从而，

$$(A-B)(A+B)^{+}=(A-B)(A^{+}-B^{+})=AA^{+}+BB^{+}.$$

于是，在(8)成立的前提下，(5′)等价于(10). 由定理3立得此证明.

推论2 若 $A,B\in C^{m\times m}$，$C,D\in C^{m\times l}$，$X,Y\in C^{m\times l}$，且

$$R(B)=N(A^*),N(B)=R(A^*), \tag{12}$$

则(1)有唯一解

$$\begin{cases}X=A^+C+B^+D\\Y=A^+D+B^+C\end{cases} \tag{13}$$

证明 由(12)式知，

$$A^*B=O,AB^*=O.$$

所以(8)式成立. 又

$$AA^++BB^+=P_{R(A)}+P_{R(B)}$$
$$=P_{N(A^*)^\perp}+P_{N(A^*)}=I.$$

于是(9)式成立. 由定理4，(1)有解. 再因(8)成立时，(11)成立，且

$$AB^+=O,BA^+=O.$$

于是，

$$(A+B)(A+B)^+=I.$$

可见，$A+B$ 可逆，且

$$(A+B)^{-1}=(A+B)^+=A^++B^+.$$

同理可证，$A-B$ 可逆，且

$$(A-B)^{-1}=A^+-B^+.$$

由定理1知，(13)是(1)的唯一解. □

2 矩阵方程组的极小范数的最小二乘解

当矩阵方程组(1)不相容时，我们可通过矩阵范数‖·‖即 $C^{m\times n}$ 中向量的欧几里得范数来定义它的最优近似解，也称极小范数的最小二乘解.

对于任意的 $H\in C^{m\times n}$，不难验证

$$\|H\|=\|\sigma(H)\| \tag{14}$$

其中 $\sigma(H)$ 是 H 的拉直.

定义1 设 $A,B\in C^{m\times n}$，$C,D\in C^{m\times l}$. 称 $C^{n\times l}$中的矩阵对(X_0, Y_0)为(1)的最小二乘解，如果对一切的 $X,Y\in C^{n\times l}$有

$$\|(AX_0+BY_0-C)+(BX_0+AY_0-D)\|\leqslant\|(AX+BY-C)+(BX+AY-D)\|,$$

$$\|(AX_0+BY_0-C)-(BX_0+AY_0-D)\|\leqslant\|(AX+BY-C)-(BX+AY-D)\|$$

即

$$\begin{cases}\|(A+B)(X_0+Y_0)-(C+D)\|\leqslant\|(A+B)(X+Y)-(C+D)\|\\ \|(A-B)(X_0-Y_0)-(C-D)\|\leqslant\|(A-B)(X-Y)-(C-D)\|\end{cases}\tag{15}$$

引理1 设 $A\in C^{m\times n}$，$B\in C^{l\times k}$，$D\in C^{m\times k}$，则矩阵方程

$$AXB=D\tag{16}$$

的最小二乘解的一般形式为

$$X=A^{(1,3)}D\,\overline{B^{(1,4)}}+Y-A^{(1,3)}AYB\,\overline{B^{(1,4)}},\tag{17}$$

其中 $Y\in C^{n\times l}$是任意的.

证明 矩阵方程(16)可由拉直变换化为

$$(A\otimes B')\sigma(X)=\sigma(D),\tag{18}$$

(18)的最小二乘解的一般形式为

$$\sigma(X)=A\otimes B')^{(1,3)}\sigma(D)+[I-(A\otimes B')^{(1,3)}(A\otimes B')]y,\tag{19}$$

其中 $y\in C^{m\times l}$是任意的. 取 $A^{(1,3)}\otimes(B')^{(1,3)}$充当$(A\otimes B')^{(1,3)}$，则(19)式成为

$$\begin{aligned}\sigma(X)&=(A^{(1,3)}\otimes(B')^{(1,3)}\sigma(D)+[I-(A^{(1,3)}A\otimes(B')^{(1,3)}B')]\sigma(Y)\\&=\sigma[A^{(1,3)}D(B')^{(1,3)})+\sigma(Y)-\sigma(A^{(1,3)}AYB(B')^{(1,3)})']\\&=\sigma[A^{(1,3)}D\,\overline{B^{(1,4)}})+\sigma(Y)-\sigma(A^{(1,3)}AYB\,\overline{B^{(1,4)}}].\end{aligned}\tag{20}$$

这里用到了

$$((B')^{(1,3)})'=\overline{B^{(1,4)}},$$

它是容易验证的. 同时，$\sigma(Y)=y$，从而

$$Y=\sigma^{-1}(y)\in C^{n\times l}.$$

这样，从(20)的逆象得出(17)式. 按(14)式，

$$\|AXB-D\|=\|\sigma(AXB-D)\|$$
$$=\|(A\otimes B')\sigma(X)-\sigma(D)\|.$$

故(17)就是(16)的最小二乘解. □

引理2 $C^{n\times l}$中的矩阵对(X_0,Y_0)为(1)的最小二乘解的充要条件是 X_0,Y_0是

$$(A+B)U=C+D$$

的最小二乘解，且 X_0-Y_0是

$$(A-B)V=C-D$$

的最小二乘解.

证明 若(X_0,Y_0)是(1)的最小二乘解，即，X_0,Y_0满足(15). 令

$$U=X+Y,U_0=X_0+Y_0,V=X-Y,V_0=X_0-Y_0,$$

即知，U_0是

$$(A+B)U=C+D \tag{21}$$

的最小二乘解，V_0是

$$(A-B)V=C-D \tag{22}$$

的最小二乘解. 反之，若 X_0+Y_0是(21)的最小二乘解，则

$$\|(A+B)(X_0+Y_0)-(C+D)\|\leqslant\|(A+B)U-(C+D)\|; \tag{23}$$

若 X_0-Y_0是(22)的最小二乘解，则

$$\|(A-B)(X_0-Y_0)-(C-D)\|\leqslant\|(A-B)V-(C-D)\|; \tag{24}$$

从(19)中 U 的任意性及(20)中 V 的任意性知，对一切 $X,Y\in C^{n\times l}$，(15)中两个不等式同时成立，即(X_0,Y_0)是(1)的最小二乘解. □

由引理1，(21)的最小二乘解为

$$(A+B)^{(1,3)}(C+D)+Z_1-(A+B)^{(1,3)}(A+B)Z_1,$$

其中，$Z_1\in C^{n\times m}$. (22)的最小二乘解为

$$(A-B)^{(1,3)}(C-D)+Z_2-(A-B)^{(1,3)}(A-B)Z_2,$$

其中，$Z_2 \in C^{n\times m}$. 故由定理2知，(X_0, Y_0)为(1)的最小二乘解当且仅当

$$X_0+Y_0=(A+B)^{(1,3)}(C+D)+[I-(A+B)^{(1,3)}(A+B)]Z_1, \quad (25)$$

$$X_0-Y_0=(A-B)^{(1,3)}(C-D)+[I-(A-B)^{(1,3)}(A-B)]Z_2. \quad (26)$$

故由(25)和(26)即得下面的

定理5 矩阵方程组(1)的最小二乘解是具有以下形式的矩阵对：

$$\begin{aligned} X_0=\frac{1}{2}[&(A+B)^{(1,3)}(C+D)+(A-B)^{(1,3)}(C-D)\\ &+(I-(A+B)^{(1,3)}(A+B)Z_1\\ &+[I-(A-B)^{(1,3)}(A-B)Z_2],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_0=\frac{1}{2}[&(A+B)^{(1,3)}(C+D)-(A-B)^{(1,3)}(C-D)\\ &+(I-(A+B)^{(1,3)}(A+B)Z_1\\ &+[I-(A-B)^{(1,3)}(A-B)Z_2].\end{aligned}$$

定义2 若$C^{n\times l}$中的矩阵对(X_0, Y_0)是矩阵方程组(1)的最小二乘解，而且，对于(1)的任一最小二乘解(X, Y)都满足

$$\begin{cases}\|X_0+Y_0\|\leqslant\|X+Y\|\\ \|X_0-Y_0\|\leqslant\|X-Y\|\end{cases}, \quad (27)$$

则称(X_0, Y_0)为(1)的最优近似解.

引理3 设$A\in C^{m\times n}$, $B\in C^{l\times k}$, $D\in C^{m\times k}$，矩阵方程(16)的最优近似解为

$$X_0=A^+DB^+. \quad (28)$$

此引理是第二章§4定理3的特例.

引理4 $C^{n\times l}$中的矩阵对(X_0, Y_0)为(1)的最优近似解的充要条件是X_0+Y_0是(21)的最优近似解，X_0-Y_0是(22)的最优近似解

证明 设(X_0, Y_0)是(1)的最优近似解，则它是(1)的最小二乘解. 由引理2，X_0+Y_0和X_0-Y_0分别是(21)和(22)的最小二乘

解，而对(21)的任一最小二乘解 U 和(22)的任一最小二乘解 V，总可令

$$X=\frac{1}{2}(U+V), Y=\frac{1}{2}(U-V)$$

使得

$$U=X+Y, V=X-Y.$$

再由引理2，(X,Y)都是(1)的最小二乘解. 根据(X_0,Y_0)的定义，必有

$$\|X_0+Y_0\|\leqslant\|X+Y\|=\|U\|, \tag{29}$$

$$\|X_0-Y_0\|\leqslant\|X-Y\|=\|V\|. \tag{30}$$

而(29)式说明 X_0+Y_0是(21)的最优近似解，(30)式说明 X_0-Y_0是(22)的最优近似解.

反之，设 X_0+Y_0和 X_0-Y_0分别是(21)和(22)的最优近似解，由引理2知，(X_0,Y_0)是(1)的最小二乘解. 同时对于(1)的任意最小二乘解(X,Y)仍由引理2知，$X+Y$ 与 $X-Y$ 分别是(21)和(22)的最小二乘解. 这样(27)式对(1)的任意最小二乘解(X,Y)均成立，即(X_0,Y_0)是(1)的最优近似解. □

定理6 设 $A,B\in C^{m\times n}$，$C,D\in C^{m\times l}$，矩阵方程组(1)的最优近似解为(X_0,Y_0)，其中

$$\begin{cases} X_0=\frac{1}{2}[(A+B)^+(C+D)+(A-B)^+(C-D)] \\ Y_0=\frac{1}{2}[(A+B)^+(C+D)-(A-B)^+(C-D)] \end{cases}. \tag{31}$$

证明 由引理3，(21)的最优近似解为

$$(A+B)^+(C+D),$$

(22)的最优近似解为

$$(A-B)^+(C-D)\quad\cdot$$

令

$$X_0+Y_0=(A+B)^+(C+D),$$

$$X_0-Y_0=(A-B)^+(C-D),$$

则由引理4知，(31)式的(X_0,Y_0)即是(1)的最优近似解. □

推论3 当 $AB^*=O$ 且 $B^*A=O$ 时，矩阵方程组(1)的最优近似解为(X_0,Y_0)，其中

$$\begin{cases} X_0=A^+C+B^+D \\ Y_0=B^+C+A^+D \end{cases} \tag{32}$$

最后，我们用实例说明矩阵方程(1)的应用背景.

一个有 m 个节点和 n 个分支的直流电子网络可以用分支中的电流与节点上的电位势来描述，以 $x_j(j=1,\cdots,n)$表示穿过分支 b_j 的电位差. 则分支电压向量 $x=[x_{ij}]$由关联矩阵 M 和电位势向量 $p=[p_i](i=1,\cdots,m)$按下式决定

$$x=M'P$$

网络的分支电流向量 $y=[y_j](j=1,\cdots n)$，则适合 $My=O$. 网络的每个分支 b_j 可看成一个元件，它的串联电压是 v_j(伏)，并联电流是 w_j(安). 以 $a_j>0$表示分支 b_j 的电导系数. 便有

$$a_j(x_j-v_j)+(y_j-w_j)=0, j=1,\cdots,n.$$

这样，分支电流 y 和分支电压 x 可通过求解约束系统

$$Ax+y=Av+w, x\in R(M'), y\in N(M)$$

而得出，其中

$$A=\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_n).$$

再考虑另一个相伴网络，它也是 m 个节点 n 个分支，关联矩阵也为 M. 但它在相应于 b_j 的分支 b'_j 上的电导系数为$\frac{1}{a_j}$. 于是便为

$$\frac{1}{a_j}(x_j-v'_j)+(y_j-w'_j)=0.$$

这个相伴网络的分支电流 y 和分支电压 x 可通过求解约束系统

$$x+Ay=v'+Aw', x\in R(M'), y\in N(M)$$

而得出.

要研究这两个相伴的网络是否有相同的或最优近似的分支电流与分支电压,就是求解

$$\begin{cases} Ax+y=b & (b=Av+w) \\ x+Ay=c & (c=v'+Aw') \end{cases}$$

的问题.

第四章　非线性矩阵方程

本章研究二次四元数矩阵方程及矩阵多项式方程.

§1　二次四元数矩阵方程

本节研究二次四元数矩阵方程

$$X^* AX+B^* X+X^* B+C=O, \tag{1}$$

$$X^* AX+B^* X+C=O, \tag{2}$$

$$CX^* AX-AX+CD=O. \tag{3}$$

利用四元数矩阵的奇异值分解及矩阵的广义逆,给出上述三类矩阵方程有解的充要条件及其通解表达式[121].

对于 $Q_{\perp}^{n\times t}=\{A\in Q^{n\times t}|A^* A=I_t\}$ 中元素我们称为列广义酉矩阵.

我们需要下列的几个引理.

引理 1　设 $A\in SP_n$, $\text{rank}A=r$,则存在 $U\in Q_{\perp}^{n\times r}$ 使得

$$A=UDU^*,$$

其中

$$D=\text{diag}(\lambda_1 I_{n_1},\cdots,\lambda_t I_{n_t}),$$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 是 A 的所有不同的正特征值, $r=\sum_{s=1}^{t}n_s$.

于是,

(i)　A 有唯一的半正定自共轭平方根(即 $X^2=A$ 的半正定自共轭解)

$$A^{\frac{1}{2}}=UD^{\frac{1}{2}}U^*$$

其中

$$D^{\frac{1}{2}}=\text{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}}I_{n_1},\cdots,\lambda_t^{\frac{1}{2}}I_{n_t});$$

(ii) A 的自共轭平方根，(即 $X^2=A$ 的自共轭解)为

$$X=UW\triangle D^{\frac{1}{2}}W^*U^*,W=\text{diag}(W_1,\cdots,W_t),$$

这里 $W_i\in Q_{\perp}^{n_i\times n_i}$，$\triangle$满足$\triangle^2=I_r$ 的实对角阵.

引理 2 设 $A=UDU^*\in SP_n$，其中 $U\in Q_{\perp}^{n\times r}$，$D$ 为对角元全正的对角阵，则

$$X^*X=A$$

的一般解为

$$X=VU^*A^{\frac{1}{2}}$$

其中 $V\in Q_{\perp}^{m\times r}$，$m\geqslant r$.

由引理 2 易证得

引理 3 设 $A\in P_m$，$C\in SC_n$，$B\in Q^{m\times n}$，则矩阵方程(1)有解的充要条件是

$$(B^*A^{-1}B-C)\in SP_n.$$

有此种解时，其通解为

$$X=A^{-\frac{1}{2}}VU^*E-A^{-1}B,$$

其中，$A^{-\frac{1}{2}}$是 A^{-1}的半正定平方根，$U\in Q_{\perp}^{n\times r}$，$V\in Q_{\perp}^{m\times r}$，$r=\text{rank}(B^*A^{-1}B-C)$，$E=(B^*A^{-1}B-C)$，$R(U)=R(B^*A^{-1}B-C)$.

引理 4 设 $A\in Q_r^{m\times n}$，$B\in Q^{n\times n}$，A 的奇异值分解为

$$A=UDV^*,$$

其中 $U\in Q_{\perp}^{m\times r}$，$C\in Q_{\perp}^{n\times r}$，$D$ 为正对角阵，则矩阵方程，

$$A^*X+X^*A=B \tag{4}$$

有解的充要条件是 $B\in SC_n$ 与 $V_{\perp}^*BV_{\perp}=0$，其中 $V_{\perp}$为 V 的广义酉正交补. 有解时，其一般解为

$$X=\frac{1}{2}(A^+)^* B(I_n+V_\perp V_\perp^*)+UFU^* A+U_\perp E,\tag{5}$$

其中,$F\in SS_r(Q)$,$U_\perp$ 为 U 的广义酉正交补,$E\in Q^{(m-r)\times n}$.

证明 易验证有

$$A^+=VD^{-1}U^*.$$

若 $B\in SP_n$ 与 $V_\perp^* BV_\perp=0$,则由上式容易验证(5)是矩阵方程(4)的解.反之,若 X 是(4)的解,则 $B\in SC_n$.令

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}=Y=\begin{pmatrix} U^* \\ U_\perp^* \end{pmatrix}X(V,V_\perp),$$

其中 $Y_1\in Q^{r\times r}$,并分别用$\begin{pmatrix} V^* \\ V_\perp^* \end{pmatrix}$,$(V,V_\perp)$左、右乘(4),则得

$$\begin{cases} DY_1+Y_1^* D=V^* BV \\ DY_2=V^* BV_1. \\ V_\perp^* BV_\perp=0 \end{cases}$$

将此第一式与

$$DY_1-Y_1^* D=N$$

联立,解得

$$Y_1=\frac{1}{2}D^{-1}V^* BV+FD,$$

其中

$$F=\frac{1}{2}D^{-1}ND^{-1}$$

是反自共轭的.于是,由

$$X=(U,U_\perp)\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^* \\ V_\perp^* \end{pmatrix}$$

易知(4)的解具有(5)的形式. □

下面,我们将引理 3 的 A 减弱为 $A\in SP_m$,得到

定理 1 设 $A\in SP_m$,$C\in SC_n$,$B\in Q_r^{m\times n}$,A、B 的奇异值分解依次为

$$A=UDU^*,B=V\triangle W^*,U\in Q_{\perp}^{m\times r},$$

则二次共轭矩阵方程(1)有解的充要条件是

$$-W_{\perp}^*CW_{\perp}\in SP_{n-t}.$$

(1)有解时,其一般解为

$$X=(A^+)^{\frac{1}{2}}UGM^*P^{\frac{1}{2}}-A^+B+\frac{1}{2}(B^*)^+(B^*A^+B-C-P)(I_n+W_{\perp}W_{\perp}^*)+VQ_1V^*B+V_{\perp}H \tag{6}$$

其中 $Q_1\in SS_t,H\in Q^{(m-t)\times n}$是任意的,$M$ 是满足

$$R(M)=R(P)$$

的列广义酉矩阵,G 是任何可乘的列广义酉矩阵,而

$$P=((W_{\perp}^*)^{(1)}E+(I_n-(W_{\perp}^*)^{(1)}W_{\perp}^*)F)((W_{\perp}^*)^{(1)}E+(I_n-(W_{\perp}^*)^{(1)}W_{\perp}^*F)^* \tag{7}$$

其中

$$EE^*=-W_{\perp}^*CW_{\perp},E\in Q^{(n-t)\times(n-t)},F\in Q^{n\times(n-t)},$$

$(W_{\perp}^*)^{(1)}$为 $W_{\perp}^*$的任意确定的{1}逆.

证明 若(1)有解 X,令

$$Y=(U,U_{\perp})^*X=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix},$$

其中,$Y_1\in Q^{r\times n}$,则由(1)得

$$Y_1^*DY_1+B^*UY_1+Y_1^*U^*B+B^*U_{\perp}Y_2+Y_2^*U_{\perp}^*B+C=0. \tag{8}$$

于是,由引理 3 及

$$A^+=VD^{-1}U^*$$

知,

$$B^*A^+B-(B^*U_{\perp}Y_2+Y_2^*U_{\perp}^*B+C)\in SP_n.$$

从而有 $P\in SP_n$,使得

$$B^*U_{\perp}Y_2+Y_2^*U_{\perp}^*B=B^*A^+B-C-P. \tag{9}$$

因此,由引理 4 知,

$$W_{\perp}^{*}(B^{*}A^{+}B-C-P)W_{\perp}=0.$$

从而

$$W_{\perp}^{*}PW_{1}=-W_{\perp}^{*}CW_{\perp}. \tag{10}$$

因为 $P\in SP_{n}$，所以由第二章 § 2 定理 6(ii)知道

$$-W^{*}CW_{\perp}\in SP_{n-t},$$

且此时易见 P 具有(7)的形式. 于是，由引理 4 得

$$U_{\perp}Y_{2}=\frac{1}{2}(B^{+})^{*}(B^{*}A^{+}B-C-P)(I_{n}+W_{\perp}W_{\perp}^{*})$$
$$+VQ_{1}V^{*}B+V_{\perp}H \tag{11}$$

其中 $Q_{1}\in SS_{t}$ 及 $H\in Q^{(m-t)\times n}$是任意的. 现在对(8)应用引理 3，得

$$Y_{1}=D^{-\frac{1}{2}}GM^{*}P^{\frac{1}{2}}-D^{-1}U^{*}B, \tag{12}$$

其中 M 是满足

$$R(M)=R(P)$$

的列广义酉矩阵，G 是任意可乘的列广义酉矩阵. 因此，将(11)，(12)代入

$$X=(U,U_{\perp})\begin{pmatrix}Y_{1}\\Y_{2}\end{pmatrix},$$

则知它具有(6)的形式.

反之，若$-W_{\perp}^{*}CW_{\perp}\in SP_{n-t}$，则由第二章 § 2 定理 6(ii)知(7)为(10)的半正定自共轭解. 于是对(9)易见引理 4 的充分性条件成立，从而，(11)的 $U_{\perp}Y_{2}$ 满足(9). 这时，对于(8)，引理 3 的充分性条件成立，且(11)、(12)的 Y_{2},Y_{1} 满足(8). 又在上述 X,Y 的代换下，(1)与(8)互换，因而易见(6)为(1)的解. □

类似于定理 1 的证明，我们证得

定理 2　设 $A\in SP_{m},C\in SC_{n},B\in Q_{r}^{m\times n},\mathrm{rank}A=t\geqslant n,A,B$ 的奇异值分解依次为

$$A=UDU^{*},B=V\triangle W^{*},$$

则矩阵方程(2)有解的必要条件是存在 $Y_{2}\in Q^{(m-t)\times n}$，使得

$$L=B^*A^+B-4(B^*U_\perp Y_2+C)\in SP_n.$$

且当

$$-W_\perp^*CW_\perp\in P_{n-r}$$

时，则以下四元数矩阵 L 是正定自共轭的：

$$L=-4CW_\perp(W_\perp^*CW_\perp)^{-1}W_1^*C+NPN^*,$$

这里 N 是满足 $R(N)=N(W_\perp^*)$ 的任意确定的右高矩阵，P 是任意可乘的正定自共轭四元数矩阵. 因而此时矩阵方程(2)有解，其一般解为

$$X=UY_1+U_\perp Y_2,$$

其中 $Y_1,U_\perp Y_2$ 的表达式分别为

$$\begin{aligned}Y_1=&\frac{1}{2}D^{-\frac{1}{2}}(EMTF^*+E_\perp(Z_1\wedge R^*F^*+Z_2F_\perp^*))S\\&-\frac{1}{2}D^{-1}U^*B,\\U_\perp Y_2=&\frac{1}{4}(B^*)^+(B^*A^+B-L-4C)+V_\perp V_\perp^*G,\end{aligned}$$

其中，$S=L^{\frac{1}{2}}$，$D^{-\frac{1}{2}}U^*BS^{-1}$的奇异值分解为

$$D^{-\frac{1}{2}}U^*BS^{-1}=ETF^*,E\in Q_\perp^{t\times p},R\in Q_\perp^{p\times q},$$

$q\leqslant\min(t-p,p)$，$\wedge=\mathrm{diag}(\sigma_1,\cdots,\sigma_q)$，$0<\sigma_2\leqslant1$，$M$ 是

$$T^{-1}(I_p-R\wedge^2R^*)T^{-1}$$

的任意自共轭平方根，(Z_1,Z_2)是任意可乘的列广义酉矩阵，$G\in Q^{m\times n}$.

定理 3 设 $A\in SP_m,D\in SC_n,C\in Q_n^{m\times n}$，

$$F=(C^*A^+C)^{\frac{1}{2}},P=\frac{1}{4}I_n-FDF,$$

A,P 的奇异值分解依次为

$$A=U\triangle U^*,P=V\wedge V_1^*,$$

其中，

$$\wedge=\mathrm{diag}(\lambda_1I_{n_1},\cdots,\lambda_pI_{n_p}),$$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ 是 P 的所有互异的正奇异值，$\sum_{s=1}^{p} n_s = t$，

则矩阵方程(3)有解的充要条件是 $P\in SP_n$（此时 $V_1=V$），并且存在

$$W=\mathrm{diag}(W_1,\cdots,W_p)$$

（W_s 是 n_s 阶广义酉矩阵），$T^2=I_t$ 的实对角阵 T 及 $Z\in SC_n$，使得对于

$$B=\frac{1}{2}I_n+VWT\Lambda^{\frac{1}{2}}W^*V^*,$$

$$E=F^{(1)}B(F^{(1)})^*+Z-F^{(1)}FZF^*(F^{(1)})^*,$$

都有

$$FF^{(1)}B(F^{(1)})^*F=B,\ AA^{(1)}CE=CE,$$

这里 $A^{(1)}$，$F^{(1)}$ 分别是 A，F 的某一{1}逆. 在此条件下，(3)的一般解为

$$X=A^{(1)}CE+(I_m-A^{(1)}A)G,$$

其中 $G\in Q^{m\times n}$.

推论 1 设 $A\in P_m$，$D\in SC_n$，$C\in Q_n^{m\times n}$，则矩阵方程(3)有解的充要条件是

$$P=\frac{1}{4}I_n-(C^*A^{-1}C)^{\frac{1}{2}}D(C^*A^{-1}C)^{\frac{1}{2}}\in SP_n.$$

在此条件下，(3)的一般解为

$X=A^{-1}C(C^*A^{-1}C)^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}I_n+L)(C^*A^{-1}C)^{-\frac{1}{2}}$，这里 L 是 P 的任意自共轭平方根.

§2 矩阵多项式方程

本节主要研究形如

$$A_0X^m+A_1X^{m-1}+\cdots+A_m=O \qquad (1)$$

的矩阵多项式方程，其中 $A_0,A_1,\cdots,A_m$ 是已知的 n 阶方阵，X 是

未知的 n 阶方阵.

1 纯量多项式方程 $f(X)=O$

首先讨论方程

$$g(X)=O, \tag{2}$$

其中,

$$g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}(\lambda-\lambda_2)^{\alpha_2}\cdots(\lambda-\alpha_h)^{\alpha_h},$$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_h$ 互异. 因为 $g(X)=O \Leftrightarrow m_X(\lambda)\,|\,g(\lambda)$,

(m_X 是矩阵 X 的最小多项式),所以, $g(X)=O$ 当且仅当 X 的每个初等因子均形如

$$(\lambda-\lambda_i)^{p_i} \quad (p_i\leqslant\alpha_i; i=1,h).$$

故(2)的解可表成

$$X=T\mathrm{diag}(\lambda_{i_1}I_{p_{i_1}}+H_{p_{i_1}},\cdots,\lambda_{i_v}I_{i_v}+H_{p_{i_v}})T^{-1} \tag{3}$$

其中, $p_1+\cdots+p_v=n, i_1,i_2,\cdots i_v=1,2\cdots,h$, T 为任意的满秩阵,

$$H_j=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ O & & 0 & 1 \end{pmatrix}_{j\times j}.$$

例 1 $f(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)$, 求 $f(X)=O$ 的所有 3 阶方阵解.

解 解集是下列 6 个相似类的并集,每个相似类的初等因子分别是

$\{(\lambda-2),(\lambda-2)^2\}$, $\{(\lambda-2),(\lambda-2),(\lambda-2)\}$,

$\{(\lambda-2)^2,(\lambda-3)\}$, $\{(\lambda-2),(\lambda-2),(\lambda-3)\}$,

$\{(\lambda-2),(\lambda-3),(\lambda-3)\}$, $\{(\lambda-3),(\lambda-3),(\lambda-3)\}$.

例 2 $f(\lambda)=\lambda^m-1$, 求 $X^m=I_n$ 的解集.

解 任一解 X 的每个初等因子必为某个

$$\lambda-\eta_j^p$$

其中

$$\eta_j^p=e^{i\frac{2\pi p}{m}}\ (p=0,\cdots,m-1),$$

故解集是所有形如

$$\mathrm{diag}(\eta_1^{j_1},\cdots,\eta_m^{j_n})$$

的对角阵所属相似类的并集，其中 $0\leqslant j_1,\cdots,j_n\leqslant m-1$.

下面讨论更一般的纯量方程

$$f(X)=O \tag{4}$$

其中 $f(\lambda)$是平面上某一区域 G 中复变量 λ 的正则函数. 对于所有的解 $X=(x_{ik})_n$，我们要求其特征值均在区域 G 里面. 设 $f(\lambda)$在 G 里面的所有零点及其重数分别为

$$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,$$

$$\alpha_1,\alpha_2\cdots.$$

与上面的情形一样，矩阵 X 的每一个初等因子必须有如下形式

$$(\lambda-\lambda_i)^{p_i} \qquad (p_i\leqslant\alpha_i),$$

故有

$$X=T\mathrm{diag}(\lambda_{i_1}I_{p_{i_1}}+H_{p_{i_1}},\cdots,\lambda_{i_r}I_{i_r}+H_{p_{i_r}})T^{-1}$$

其中，$i_1,i_2,\cdots,i_r=1,2,\cdots$；$p_{i_1}\leqslant\alpha_{i_1},p_{i_2}\leqslant\alpha_{i_2},\cdots,p_{i_r}\leqslant\alpha_{i_r}$；$p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots+p_{i_r}=n$，$T$ 是任意的满秩矩阵.

2 矩阵多项式方程(1)

定理 1 设

$$F(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1A^{m-1}+\cdots+A_m,$$

$$\mathcal{F}(\lambda)=\det F(\lambda),$$

$$F(X)=A_0X^m+A_1X^{m-1}+\cdots+A_m,$$

其中 $A_0,A_1,\cdots,A_m$ 都是 n 阶已知方阵，X 是 n 阶未知方阵，则矩

阵方程(1)的每个解 X 一定满足纯量多项式方程

$$f(X)=O. \tag{5}$$

证明 用 $\lambda I-A$ 右除 $F(\lambda)$后,有

$$\begin{aligned}F(\lambda)&=A_0\lambda^{m-1}(\lambda I-A)+(A_0A+A_1)\lambda^{m-1}+A_2\lambda^{m-2}+\cdots+A_m\\&=\lambda_0\lambda^{m-1}(\lambda I-A)+(A_0A+A_1)\lambda^{m-2}(\lambda I-A)\\&\quad+(A_0A^2+A_1A+A_2)\lambda^{m-2}+A_3\lambda^{m-3}+\cdots+A_m\\&=Q(\lambda)(\lambda I-A)+F(A).\end{aligned}$$

若

$$F(A)=O,$$

则

$$F(\lambda)=Q(\lambda)(\lambda I-A).$$

从而

$$f(\lambda)=\det F(\lambda)=\det Q(\lambda)\det(\lambda I-A).$$

由 Cayley—Hamilton 定理得 $f(A)=O$. □

仿定理 1,读者可研究矩阵多项式方程

$$Y^mA_0+Y^{m-1}A_1+\cdots+A_m=O,$$

其中,$A_0,A_1,\cdots,A_m$ 为已知方阵,Y 为未知方阵.

3 矩阵方程 $X^m=A$

本段我们研究矩阵多项式方程

$$\mathrm{X}^{\mathrm{m}}=\mathrm{A}. \tag{6}$$

对给定的 n 阶方阵 A,方程(6)的每个解 X 都称作 A 的一个 m 次方根. 本段旨在给出(6)有解的充要条件. 首先研究 $m=2$ 的情形[123,124]

$$X^2=A. \tag{7}$$

我们先研究(7)在复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的情况. 用 $J(\lambda_0,t)$表示如下形式的 Jordand 块矩阵:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}_t .$$

定理 2 若 $A \in C^{n\times n}$ 可对角化，则 A 有平方根.

证明 设 A 可对角化，则存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n).$$

令

$$D_1 = \mathrm{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \cdots, \sqrt{d_n}),$$

则

$$D_1^2 = D.$$

再令

$$B = PD_1P^{-1},$$

从而 $B^2 = A$，即 A 有平方根. □

引理 1 (i) $\lambda_0 \neq 0$，则

$$J^2(\sqrt{\lambda_0}, t) \sim J(\lambda_0, t);$$

(ii) 设 $t > 1$，若 $t = 2k$，则

$$J^2(0,t) \sim \begin{pmatrix} J(0,k) & \\ & J(0,k) \end{pmatrix},$$

若 $t = 2k+1$，则

$$J^2(0,t) \sim \begin{pmatrix} J(0,k) & \\ & J(0,k+1) \end{pmatrix}.$$

证明 (i) 易见

$$J^2(\sqrt{\lambda_0},t)=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{\lambda_0} & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\sqrt{\lambda_0} & \lambda_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\sqrt{\lambda_0} & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\sqrt{\lambda_0} & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

相应的特征矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda-\lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{\lambda_0} & \lambda-\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2\sqrt{\lambda_0} & \lambda-\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2\sqrt{\lambda_0} & \lambda-\lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -2\sqrt{\lambda_0} & \lambda-\lambda_0 \end{pmatrix},$$

从而其 t 阶行列式因子为 $(\lambda\lambda_0)^t$. 注意到它的由第 $2,3\cdots,t$ 行及第 $1,2,\cdots,t-1$ 列组成的 $t-1$ 阶子式为

$$g(\lambda)=\begin{vmatrix} -2\sqrt{\lambda_0} & \lambda-\lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -2\sqrt{\lambda_0} & \lambda-\lambda_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2\sqrt{\lambda_0} & \lambda-\lambda_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -2\sqrt{\lambda_0} \end{vmatrix}.$$

由于

$$g(\lambda_0)=(-2\sqrt{\lambda_0})^{t-1}\neq 0,$$

故 $\lambda-\lambda_0$ 不整除 $g(\lambda)$. 这样, $g(\lambda)$ 与 $(\lambda-\lambda_0)^t$ 的最大公因式为 1, 而 $t-1$ 阶行列式因子必须整除 t 阶行列式因子及每一个 $t-1$ 阶子式, 故 $t-1$ 阶行列式因子为 1, 所以 $J^2(\sqrt{\lambda_0},,t)$ 的初等因子为 $(\lambda-\lambda_0)^t$, 与 $J(\lambda_0,t)$ 的初等因子相同, 所以

$$J^2(\sqrt{\lambda_0},,t)\sim J(\lambda_0,t).$$

(ii) 易见

$$J^2(0,t)=\begin{pmatrix}0 & & & \\ 0 & & & \\ 1 & & & \\ & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由此可得它的初等因子为: 当 n 为偶数即 $n=2k$ 时为 λ^k,λ^k; 当 $n=2k+1$ 时为 λ^k,λ^{k+1}, 从而有(ii)成立. □

定理 3　若 A 可逆, 则 A 有平方根.

证明　设 A 的 Jordan 标准形为

$$\begin{pmatrix}J(\lambda_1,t_1) & & & \\ & J(\lambda_2,t_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_i,t_k)\end{pmatrix}.$$

由于 A 可逆, 故特征根 $\lambda_i\neq 0, i=1,2,\cdots,k$.

由引理 1 的(i)知,

$$J(\lambda_i,t_1)\sim J^2(\sqrt{\lambda_i},t_i), i=1,\cdots,k.$$

令

$$J_1=\begin{pmatrix} J(\sqrt{\lambda_1},t_1) & & & \\ & J(\sqrt{\lambda_1},t_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\sqrt{\lambda_k},t_k) \end{pmatrix},$$

从而 $A\sim J_1^2$，即有可逆阵 P 使 $A=P^{-1}J_1^2P$，故

$$A=(P^{-1}J_1P)^2.$$

此示，$P^{-1}J_1P$ 的 A 为平方根. □

定理 4　设 $J(\lambda_0,t)$ 为 λ_0 的 t 阶 Jordan 块矩阵，则

(*i*)　$\lambda_0\neq 0$ 时，$J(\lambda_0,t)$ 有平方根；

(*ii*)　$\lambda_0=0$ 时，$J(0,t)$ 有平方根当且仅当 $t=1$.

证明　(*i*)　$\lambda_0\neq 0$ 时，$J(\lambda_0,t)$ 为可逆矩阵，从而由定理 3 立即得出.

(*ii*)　当 $t=1$ 时，$J(0,1)=(0)$，显然有平方根. 下证必要性. 假设 $t>1$，并且设 $J(0,t)$ 有平方根 K，则易知 K 的特征根为 0，不妨设 K 的 Jordan 标准形为

$$\begin{pmatrix} J(0,t_1) & & & \\ & J(0,t_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(0,t_k) \end{pmatrix}$$

其中，$t_1+t_2+\cdots+t_k=t$，则

$$K^2=J(0,t)\sim\begin{pmatrix} J^2(0,t_1) & & & \\ & J^2(0,t_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J^2(0,t_k) \end{pmatrix}\stackrel{\text{def}}{=\!=}T_1.$$

若 $t_1=t_2=\cdots t_k=1$，则 J_1 的初等因子为 $\lambda,\lambda,\cdots,\lambda,(t$ 重)，与

$J(0,t)$的初等因子为 λ^t 矛盾.

若不然,不妨设 $t_1>1$,则由引理 1 之(ii)知,$J^2(0,t_1)$有初等因子 $\lambda^{[\frac{t_1}{2}]}$,显然,

$$\lambda[\frac{t}{2}]<t_1\leqslant t,$$

从而 J_1 有初等因子 $\lambda^{\frac{t}{2}}$,故与 $J(0,t)$的初等因子为 λ^t 矛盾. □

定理 5　设 $A\in C^{n\times n}$,则 A 有平方根的充要条件为 A 的 Jordan 标准形形如

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1,t_1) & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & J(\lambda_k,t_k) & & & & & \\ & & & J_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & J_{r_0} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_i\neq 0,i=1,\cdots,k$,分块矩阵的阶数之和为 n,

$$J_i=\begin{pmatrix} J(0,t_{i_1} & \\ & J(0,t_{i_2}) \end{pmatrix},$$

t_{i_1},t_{i_2}为相同或相差 1 的正整数,$i=1,\cdots,r$.

证明　充分性　由引理 1 知 Jordan 标准形相似于

$$
\begin{bmatrix}
J^2(\sqrt{\lambda_1},t_1) & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & J^2(\sqrt{\lambda_k},t_k) & & & & & & \\
& & & J^2(0,t_{k+1}) & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & \\
& & & & & J^2(0,t_{k+r}) & & & \\
& & & & & & 0 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
J(\sqrt{\lambda_1},t_1) & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & J(\sqrt{\lambda_k},t_k) & & & & & & \\
& & & J(0,t_{k+1}) & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & \\
& & & & & J(0,t_{k+r}) & & & \\
& & & & & & 0 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 0
\end{bmatrix}
$$

故 A 有平方根.

必要性由引理 1 得证. □

注 1 由引理 1 及定理 4,易给出存在平方根的方阵的平方根

注 2 类似地可讨论复方阵的 3 次甚至 n 次根的存在性.

下面考虑矩阵方程(7)在实数域 R 上的情形.

引理 2 设 A,B 为实方阵,则

$$A\overset{R}{\sim}B\Leftrightarrow A\overset{C}{\sim}B.$$

令

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ O & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

是实系数多项式

$$f(x)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$$

的伴侣矩阵，易知，N 的非常数的不变因子为多项式 $f(\lambda)$.

设 z 为非实复数，因

$$\begin{pmatrix} J(z,t) & \\ & J(\bar{z},t) \end{pmatrix}$$

与 $N(z,t)$的不变因子相同，故有

$$\begin{pmatrix} J(z,t) & \\ & J(\bar{z},t) \end{pmatrix} \overset{C}{\sim} N(z,t).$$

引理 3 设 z 为非实复数，则

$$N^2(\sqrt{z},t) \overset{R}{\sim} N(z,t).$$

证明 由于

$$N(\sqrt{z},t) \overset{C}{\sim} \begin{pmatrix} J(\sqrt{z},t) & \\ & \overline{J(\sqrt{z},t)} \end{pmatrix},$$

故

$$N^2(\sqrt{z},t) \overset{C}{\sim} \begin{pmatrix} J^2(\sqrt{z},t) & \\ & \overline{J^2(\sqrt{z},t)} \end{pmatrix}$$

$$\overset{C}{\sim} \begin{pmatrix} J(z,t) & \\ & J(\bar{z},t) \end{pmatrix} \overset{C}{\sim} N(z,t).$$

由引理 2 即知，

$$N^2(\sqrt{z},t)\overset{R}{\sim}N(z,t). \square$$

引理 4 设实数 $a<0$，则 $J(a,t)$ 在 R 上无平方根. 而

$$\begin{pmatrix} J(a,t) & \\ & J(a,t) \end{pmatrix}$$

在 R 上有平方根.

证明 不妨设 $J(a,t)(a<0)$ 在 R 上有平方根 A_1，则

$$J(a,t)=A_1^2.$$

不妨设 A_1 的 Jordan 标准形为

$$\operatorname{diag}(J(a_1,t_1),J(a_2,t_2),\cdots,J(a_s,t_s)),$$

即

$$A_1\overset{C}{\sim}\begin{pmatrix} J(a_1,t_1) & & & \\ & J(a_2,t_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(a_s,t_s) \end{pmatrix}.$$

由于 A_1 的特征值的平方等于 a，故 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 均不为零. 由引理 3 有

$$A_1^2\overset{C}{\sim}\begin{pmatrix} J^2(a_1,t_1) & & & \\ & J^2(a_2,t_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J^2(a_s,t_s) \end{pmatrix}$$

$$\overset{C}{\sim}\begin{pmatrix} J^2(a_2^2,t_1) & & & \\ & J(a_2^2,t_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(a_s^2,t_s) \end{pmatrix},$$

故

$$J(a,t)\overset{C}{\sim}\begin{pmatrix} J(a_1^2,t) & & & \\ & J(a_2^2,t) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(a_s^2,t_s) \end{pmatrix}.$$

于是，$J(a,t)$与

$$\operatorname{diag}(J(a_1^2,t_1),\cdots,J(a_s^2,t_s))$$

有相同的不变因子，故

$$a_1^2=a,t_1=t,s=1,$$

即 A_1 的 Jordan 标准形为 $J(\sqrt{a},t)$. 由 $a<0$ 知，$\sqrt{a}$ 为非实复数. 因 A_1 的非常数不变因子为

$$(\lambda-\sqrt{a})^t,$$

为非实复数系数多项式，矛盾(因实域上方阵的不变因子为 λ 的实数多项式). 故结论成立.

不妨设 $a=-u^2<0,u>0$，则

$$\sqrt{a}=ui,\overline{\sqrt{a}}=-ui=-\sqrt{a}.$$

于是，

$$N^2(ui,t)\overset{C}{\sim}\begin{pmatrix} J(ui,t) & \\ & J(\overline{ui},t) \end{pmatrix}^2$$

$$=\begin{pmatrix} J^2(ui,t) & \\ & J^2(\overline{ui},t) \end{pmatrix}$$

$$\overset{C}{\sim}\begin{pmatrix} J(a,t) & \\ & J(a,t) \end{pmatrix}.$$

由引理 2，即有

$$N^2(ui,t)\overset{R}{\sim}\begin{pmatrix} J(a,t) & \\ & J(a,t) \end{pmatrix}.$$

故 $\begin{pmatrix} J(a,t) & \\ & J(a,t) \end{pmatrix}$ 有平方根. □

定理 6 实数域上方阵 A 有平方根当且仅当 A 在实数域上相似于(即实数域上的标准形)分块矩阵

$$\mathrm{diag}(N_1, N_2, \cdots, N_k),$$

其中 N_i 形如如下之一:

i) $J(a,t), a>0$;

ii) $N(a+bi,t), a+bi$ 为非实复数;

iii) $\begin{pmatrix} J(0,t_1) & \\ & J(0,t_2) \end{pmatrix}$

t_1, t_2 为相等或相邻的正整数;

iv) $\begin{pmatrix} J(b,t) & \\ & J(b,t) \end{pmatrix}, b<0$;

v) 0.

证明 设实矩阵 A 有平方根 A_1,即 $A_1^2=A$. 不妨设 A_1 的 Jordan 标准形为

$$\mathrm{diag}(J(a_1,t_1), \cdots, J(a_k,t_k)),$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为 A_1 的特征值. 从而

$$A=A_1^2 \overset{C}{\sim} \mathrm{diag}(J^2(a_1,t_1), \cdots, J^2(a_k,t_k)).$$

由引理 3,4 知:若 a_i 为非 0 实数,则

$$J^2(a_i,t) \overset{R}{\sim} J(a_i^2,t), a_i^2>0;$$

若 $a_i=0$,则

$$J^2(0,t) \overset{R}{\sim} \begin{pmatrix} J(0,l_1) & \\ & J(0,l_2) \end{pmatrix},$$

l_1, l_2 为相同或相邻的正整数;若 a_i 为复数,由于实系数多项式的复根成对出现,故 A_1 的 Jordan 标准形中有 Jordan 块 $J(a_i,t)$,必有 Jordan 块 $J(\bar{a}_i,t)$,而

$$\begin{pmatrix} J^2(a_i,t) & \\ & J^2(\bar{a}_i,t) \end{pmatrix} \overset{R}{\sim} N(a+bi,t)$$

或

$$\begin{pmatrix} J(b,t) & \\ & J(b,t) \end{pmatrix}, b<0,$$

故必要性得证.

反之,由引理 3,4 知,形如 i)～v)的分块矩阵均有平方根,故 A 有平方根. □

我们易证得四元体 Q 上的情形.

定理 7 设 $A\in Q^{n\times n}$,则 A 有平方根当且仅当 A 的 Jordan 标准形如

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1,t_1) & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & J(\lambda_k,t_k) & & & & & \\ & & & J_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & J_{k_0} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中

i) λ_i 为非 0 复数,$i=1,\cdots,k$;

ii) $J_i=\begin{pmatrix} J(0,t_{i1}) & \\ & J(0,t_{i2}) \end{pmatrix}$,

t_{i1},t_{i2}为相同或相邻的正整数,$i=1,\cdots,r$;

iii) 分块矩阵的级数之和为 n.

最后我们给出更一般的结果:

定理 8 方程(6)有解当且仅当若 A 的相应于特征值 0 的初等因子为 $\{\lambda^{n_1},\lambda^{n_2},\cdots\lambda^{n_m},\cdots,\lambda^{n_{km}}\}$,

其中 $n_1\geqslant\cdots\geqslant n_{km}\geqslant 0, n_{(k-1)m+1}\geqslant 1$,则

$n_{rm+1}-n_{(r+1)m}\leqslant 1, r=0,1\cdots,k-1.$ □

参考文献

[1] 谢邦杰,环与体上的矩阵与两类广 Jordan 形式,吉林大学自然科学学报,1(1978),21～46.

[2] Hungerford T. W., *Algebra*, Spring－Verlag, New York Inc., 1980.

[3] Huylebrouck D. etc., The Moore－Penrose inverse of a matrix over a semisimple Artinian ring, *Linear and Multilinear Algebra*, 16(1984), 239～246.

[4] 谢邦杰,四元数自共轭矩阵与行列式,吉林大学自然科学学报,2(1980),19—35.

[5] 曹重光,四元数自共轭矩阵的几个定理,数学研究与评论,8:3(1988),346～35.

[6] 庄瓦金,关于四元数矩阵的奇异值分解,新疆大学学报,4:1(1987),22～28.

[7] Van Loan C. F., Generalizing the singular value decomposition, *SIAM J. Numer. Anal.*, 13(1976), 76～83.

[8] 曹重光,环上矩阵的广义逆,数学学报,31:1(1988),131～133.

[9] 陈建龙,关于环上矩阵的广义逆,数学学报,34:5(1991),623—630.

[10] 屠伯埙,四元数体上的矩阵的弱直积与弱圈积,复旦学报(自然科学版),30:3(1991),331～340.

[11] Wolovich W. A., Skew prime polynomial matrices, *IEEE Trans. Automat Control AC.*, 23(1978), 880～887.

[12] Porter A. D., Solvability of the matrix equation $AX=B$, *Linear Algebra Appl.*, 13(1976), 177～184.

[13] Khatir C. G. and Mitra S. K., Hermitian and nonnegative

definite solutions of linear matrix equations, *SIAM J. Appl. Math.*, 31:4(1976), 579～585.

[14] Vetter W. J., Vector structures and solutions of linear matrix equation, *Linear Algebra Appl.*, 10(1975), 181～188.

[15] Maguns J. R. and Neudecker H., The elimination matrix: some lemmas and applications, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 1(1980), 422～429.

[16] Henk Don F. J., On the symmetric solutions of a linear matrix equation, *Linear Algebra Appl.*, 93(1987), 1～7.

[17] Daihua, On the symmetric solutions of linear matrix equations, *Linear Algebra Appl.*, 131(1990).

[18] Uhlig F., On the matrix equation $AX=B$ with applications to the generators of a controllability matrix, *Linear Algebra Appl.*, 85(1987), 203～209.

[19] 王卿文,关于体上矩阵方程 $A_{m\times n}X_{n\times s}=B_{m\times s}$的解,数学研究与评论,15:2(1995),249～252.

[20] 王卿文,关于体上矩阵方程 $A_{mn}X_{ns}=B_{ms}$之解的注记,工科数学,11:4(1995),95～97.

[21] 王卿文,关于四元数矩阵方程 $AX=B$,数学研究,28:4(1995),75～78.

[22] 王卿文,关于解矩阵方程 $AX=B$,烟台师范学院学报(自然版),9:1(1993),66～69.

[23] 王卿文,体上一矩阵方程的自共轭解与半正定自共轭解,中国矩阵论及其应用会议论文集,28.

[24] 王卿文,体上的矩阵方程 $X_{m\times n}A_{n\times s}=B_{m\times s}$,山东师大学报(自然版),7:4(1992),21～25.

[25] 王卿文,用矩阵的初等行变换解矩阵方程 $X_{n\times s}A_{n\times s}=B_{n\times s}$,

数学通报，2(1993)，33～35.

[26] 王卿文，体上矩阵方程 $XA=B$ 及其反问题，山东师大学报(自然版)，待发表.

[27] 王卿文，矩阵方程 $XA=B$ 的亚(半)正定自共轭四元数矩阵解，烟台师范学院学报(自然版)，12:1(1996)，10～14.

[28] 王卿文，关于四元数矩阵的反问题，曲阜师范大学学报(自然版)，待发表.

[29] 黄克明，王卿文，复矩阵方程 $AX=B$ 的次正定矩阵解，山东师 大学报(自然版)，10:3(1995)，27～30.

[30] 廖安平，矩阵方程 $AX=B$ 的一类反问题及数值解法，计算数学，1(1990)，108～112.

[31] 杨尚骏，半正定矩阵及矩阵方程 $AX=B$ 的反问题，应用数学，7:2(1994)，248～251.

[33] 李绍疆，若干矩阵反问题，中国科学技术大学学报，14:2(1984)，195～203.

[34] 张磊，对称非负定矩阵反问题解存在的条件，计算数学，11:4(1989)，337～343.

[35] 张磊，一类矩阵反问题及其数值解法，计算数学，4(1987)，430～437.

[36] 李森林，几类直接控制系统绝对稳定的充要条件，科学通报，10(1982)，581～582.

[37] 张磊等，关于线性代数方程 $Ax=b$ 的一类反问题，数学的实践与认识，1(1984)，21～26.

[38] 郭忠，矩阵正定性判定及线性方程组 $Ax=b$ 的反问题求解，科学通报，2(1987)，95～98.

[39] 王卿文，关于非齐次线性方程组的又一类反问题，数学通报，3(1994)，35～37.

[40] 王卿文，线性方程组反问题的推广，数学通报，4(1995)，44

~46.

[41] 王卿文,林春艳,除环上左线性方程组的反问题,数学研究,29:2(1996),91~95.

[42] 王卿文,体上右线性方程组的反问题,数学研究与评论,待发表.

[43] 王卿文,除环上左线性方程组反问题的右高解与次半正定解,数学研究,待发表.

[44] WuLei, The Re-positive definite solutions to the matrix inverse problem $AX = B$, *Linear Algebra Appl.*, 174 (1992), 145~151.

[45] 王卿文,体上的矩阵方程 $AXA^* = B$,数学杂志,16:2 (1996),157~162.

[46] Wang Qingwen (王卿文), A matrix equation $A_{mn}X_{ns}B_{st} = C$ over an arbitrary skew field, *Chinese Quarterly J. of Math.*, 11:4(1996), 1~5.

[47] Wang Qingwen (王卿文), The metapositive definite self-conjugate solution of the matrix equation $AXB=C$ voer a skew field, *Chinese Quarterly J. of Math.*, 10:3(1995), 42~51.

[48] Wang Qingwen (王卿文), Metapositive semidefinite solutions to the matrix equation $AXB=C$ over a strong p-division ring, *Northeast Math. J.*, 12:2(1996).

[49] Wang Qingwen, The self-conjugate solutions of matrix equations $AXB=C$, $AXA^* + \bar{B}YB^* = C$ and $[A^*XA, B^*XB] = [C, D]$ over a skew field, to appear in *J. of Math.*

[50] Wang Qingwen and L. C. Yan, Skewpositive semidefinite solutions to the quaternion matrix equation $AXB=C$, to

appear in *Far East J. of Math. Science*.

[51] Wang Qingwen, The metapositive semidefinite solutions to the system of quaternion matrix equations$[A^* XA, B^* XB]=[C,D]$, to appear in *Mathematatica Japonica*.

[52] Wang Qingwen, Skewpositive (semi)definite solutions to the quaternion matrix equation $AXA^{(*)}=B$, to appear in *Far East J. of Math. Science*.

[53] Wang Qingwen, Generalization of Roth's theorem, *J. of Math. Res. & Exp.*, 16:(1996), 35～40.

[54] 王卿文,任意体上的双矩阵分解与矩阵方程,数学学报,39:3(1996),386～403.

[55] Wan Qingwen, Matrix equations $AX^* - XB=C$ and $AX \mp XB=\pm C$ over skew fields, to appear in *Advances in Math*.

[56] Wang Qingwen, The matrix equation $AXB+CYD=E$ over a ring with identity, to appear in *Northeast Math. J*.

[57] 王卿文,Roth 定理及一类方程的求解在环上的推广,数学研究,29:3(1996),75～80.

[58] Wang Qingwen, On a matrix equation $AX+XB=C$ over a skew field, *Chinese Quarterly J. of Math.*, 8:3(1993), 97－102.

[59] Wang Qingwen, Schmidt decomposition of quaternion matrix and the orthonormalization of vectors in a generalized unitary spaces, to appear in *Chinese Quarterly J. of Math*.

[60] 王卿文,实矩阵方程 $AXB=C$ 的次正定解,第二届全国矩阵论及应用会议论文集.

[61] 王卿文,体上的矩阵方程$\sum_{i=1}^{l} A_i XB_i = E$,第二届全国矩阵论

及应用会议论文集.

[62] 张树青,王卿文,半正定四元数矩阵与矩阵方程 $AX=B$ 的反问题,第二届全国矩阵论及应用会议论文集.

[63] 王卿文,任意体上的矩阵方程 $A_{m\times n}X_{n\times s}=B_{m\times t}Y_{t\times s}$,烟台师范学院学报(自然版),10:3(1994),172~175.

[64] 王卿文,关于任意体上的矩阵方程 $X_{m\times n}A_{n\times s}=Y_{m\times t}B_{t\times s}$,河南师范大学学报,23:1(1995),19~22.

[65] 王卿文,体上矩阵方程 $AXB=C$ 的矩阵解法,烟台大学学报(自然工程版),3(1996)

[66] 王卿文,亚(半)正定次自共轭分块矩阵与矩阵方程,曲阜师范大学学报(自然版),待发表.

[67] 王卿文,体上的矩阵方程 $AXB+CXD=E$,山东工业大学学报(自然版),待发表.

[68] 王卿文,任意体上的矩阵方程 $AXB=CYD$,烟台师范学院学报(自然版),待发表.

[69] 王卿文,关于p-除环上分块矩阵秩的一些恒等式,数学研究与评论,15:5(1995),97~101.

[70] 王卿文,广义酉空间中的线性变换,曲阜师范大学学报(自然版),22:1(1996),37~40.

[71] 王卿文,欧氏环上某些矩阵特征性质的刻划,工科数学,2(1995),107~109.

[72] 王卿文,单 Artinian 环上的矩阵方程 $AXB=CYD$,工程数学学报,待发表.

[73] Roth W. E. ,The equations $AX-YB=C$ and $AX-XB=C$ in matrices,*Proc. Amer. Math. Soc.* 3(1952),392~396.

[74] Hartwig R. E. ,Roth's equivalence problem in unit regular rings,*Proc. Amer. Math. Soc.* ,59(1976),39~44.

[75] Franders H. and Wimmer H. K. ,On the matrix equations

$AX-XB=C$ and $AX-YB=C$, *SIAM. J. Appl. Math.*, 32(1997)707－710.

[76] Gustafson W. H., Roth's theorems over commutative rings, *Linear Algebra Appl.*, 23(1979), 245～251.

[77] Gustafson W. H. and Zelmanowitz J. M., On matrix equivalence and matrix equations, *Linear Algebra Appl.*, 27(1979), 219～224.

[78] Guralnick R. M., Roth's theorems and decomposition of modules, *Linear Algebra Appl.*, 39(1980), 155～165.

[79] LiJiongsheng, On a proof of Roth's theorem, *J. Math. Res, & Exp.*, 4:4(1984), 25～26.

[80] Guralnick R. M., Roth's theorems for sets of matriecs, *Linear Algebra Appl.*, 71(1985), 113～117.

[81] 甘特马赫尔，矩阵论，高等教育出版社，1957.

[82] 高维新，矩阵方程 $AX-XB=C$ 的连分式解法，中国科学（A 辑），6:(1988)，576～584.

[83] 胡端平，矩阵方程 $AX-XB=C$ 的最小多项式解法，应用数学学报，16:3(1993)，295～301.

[84] Bôcher M., Introduction to higher algebra, Macmillan, New York, 1947.

[85] Jameson A., Solution of the equation $AX+XB=C$ by inversion of an $m\times m$ or $n\times n$ matrix, *SIAM. J. Appl. Math.*, 16:5(1968), 1020～1023.

[86] Müller P. C., Solutions of the matrix equations $AX+XB=-Q$ and $S'X+XS=-Q$, *SIAM J. Appl. Math.*, 18:3 (1970), 682～687.

[87] Ma E. C., A finite series solutions of the matrix equation $AX-XB=C$, *SIAM J. Appl. Math.*, 14:3(1966), 490～

495.

[88] Hartwig R. E. ,Resultants and the solution of $AX-XB=-C$,*SIAM J. Appl. Math.* ,23:(1972),104～117.

[89] 段广仁、胡文远,关于矩阵方程 $AX-XC=Y$,控制与决策,7:2(1992),143～147.

[90] 邱海明、付明义,关于方程 $AX+XB=C$ 的解法,控制与决策,4:2(1989),38～40.

[91] Kucera V. ,The matrix equation $AX+XB=C$,*SIAM J. Appl. Math.* ,26:1(1974),15～25.

[92] Hoskins W. D. etc. ,High order iterative mathods of the solution of the matrix equation $XA+AY=F$,*Linear Algebra Appl.* 23(1979),121～139.

[93] Hartwig R. E. ,$AX-XB=C$,resultants and generalized inverse,*SIAM J. Appl. Math.* ,28(1975),154～183.

[94] Souza E. ,Controllability,observability and the solutions of $AX-XB=C$,*Linear Algebra Appl.* ,39(1981),167～188.

[95] Hoskins W. D. ,Meek D. S. and Walton D. J. ,The numerical solution of the matrix equation $XA+AY=F$,*BIT*,17:2(1977),184～190.

[96] Jacobson N. ,The theory of rings,*Math. Surveys*,*Amer. Math. Soc.* ,1943.

[97] Bülent Özguler A. ,The equation $AXB+CYD=E$ over a principal ideal domain,*SIAM J. Matrix Anal. Appl.* ,12:3(1991),581～591.

[98] Chang Xiaowen etc. ,The symmetric solution of the matrix equations $AX+YA=C$, $AXA^T+BYB^T=C$ and $(A^TXA, B^TXB)=(C, D)$, *Linear Algebra Appl.* , 179

(1993), 171～189.

[99] Chu K. E., Exclusion theorems of the generalized eigenvalue problem, *Numerical Analysis Rpt.*, *NA/11/85*, Dept. of Math., Univ. of Reading, 1985.

[100] Epton M. A., Methods for the solution of $AXB-CXD=E$ and its application in the numerical solution of implicit ordinary differential equations, *BIT*, 20 (1980), 341～345.

[101] Gohberg I., Lancaster P. and Rodman L., *Matrix polynomials*, New York, Academic Press Inc., 1982.

[102] Lewis F. L., Adjoint matrix, Bezout theorem, Cayley—Hamilton theorem and Fadeev's method of the matrix pencil $(SE-A)$, *Proceedings of the 22nd IEEE Conference on Decision and Control*, 1983, 1282～1288.

[103] Gantmacher F. R., *Matrix theory*, Vols. 1, 2, Chelsea, New York, 1977.

[104] A. Cayley, On the quaternion equation $qQ-Qq'=O$, *Mess. of Math.*, 14(1885), 108～112.

[105] Hernandez V. etc., Explicit solution of the matrix equation $AXB-CXD=E$, *Linear Algebra Appl.*, 121(1989), 333～344.

[106] Djaferis T. E. and Mitter S. K., Algebraic methods for the study of some linear matrix equations, *Linear Algebra Appl*, 44(1982), 125～142.

[107] Zariski O. and Samuel P., *Commutative Algebra*, Vol. Ⅱ Van Nostrand, Princeton.

[108] Wimmer H. K., Linear Matrix equations: the module theoretic approach, *Linear Algebra Appl.*, 120(1989), 149～

164.

[109] Wimmer H. K. , Linear matrix equations, controllability and observavility, and the rank of solutions, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 9(1988), 570～578.

[110] Woude Vander J. W. , Almost noninterating control by measurement feed back, *Sytem Control Lett.* , 9(1987), 7～16.

[111] King－wash E. C. , Singular value and generalized singular value decompositions, *Linear Algebra Appl.* 88/89 (1987), 83～98.

[112] Bulent Ozguler A and Nail Akar, A common solution to a pair of linear matrix equatlons over a principal ideal domain, *Linear Algebra Appl.* , 144(1991), 85～99.

[113] Sujit K. M. , Common solutions to a pair of linear matrix equations $A_1XB_1=C_1$ and $A_2XB_2=C_2$, *Proc. Camb. Phil. Soc.* , 74(1973), 213～216.

[114] Lancaster P. , Explicit solutions of linear matrix equations, *SIAM Review.* 12:4(1970), 544～566.

[115] Baksalary J. K. and Kala R. , The matrix equation $AXB+CYD=E$, *Linear Algebra Appl.* , 30(1980), 141～147.

[116] Eric C. K. , The solution of the matrix equations $AXB-CXD=E$ and $(YA-DZ), YC-BZ)=(E,F)$, *Linear Algebra Appl.* 93(1987), 93～105.

[117] Kemeny J. G. and Suell J. L. , *Finite Markov Chains*, Spring－verlag, Now York, 1976.

[118] Campbell S. L. and Meyer C. D. , *Generalized inverse of linear transformations*, Pitman London, 1979.

[119] Cline R. E. , *SIAM J. Numer. Anal. Series.* , B (2)

(1965),99～114.

[120] 江声远,冯良贵,一类二元矩阵方程组的解,江西师范大学学报(自)16:1(1992),8～13.

[121] 庄瓦金,四元数矩阵方程,数学学报,30:5(1987),688～694.

[122] Crone L. ,Second order adjoint matrix equations,*Linear Algebra Appl.* ,39(1981),61～72.

[123] 李祥明,复数域上方阵的平方根,烟台师范学院学报,11:1(1995),10～16.

[124] 李祥明,实数域及四元数除环上有平方根的方阵,烟台师范学院学报,12:1(1996),6～9.

[125] 屠伯埙,李君如,ляпунов 第二方法与矩阵方程 $AX+XB'=C$,数学年刊,4A,4(1983),534～542.

[126] 王卿文,张树青,四元数矩阵方程$[A_1XB_1, A_2XB_2]=[C_1, C_2]$,第二届全国矩阵及应用会议论文集.

[127] 王卿文,单 Artinian 环上的矩阵方程组,数学学报,待发表.

[128] 王卿文,四元数矩阵方程组$[A^*XA, B^*XB]=[C, D]$的斜半正定解,数学进展,待发表.

[129] Wang Qingwen,On a system of matrix equations over an arbitrary skew field,*Chinese Quarterly J. of Math.* ,9:1(1994),65～70.

[130] Wang Qingwen and Wang Desheng,A further study of the system of matrix equations over a skew field, *Chinese Quarterly J. of Math.* ,9:4(1994),22～30.

[131] 王卿文,任意体上的矩阵方程组,山东师大学报(自然版)9:4(1994),14～17.

[132] 王卿文,薛有才,任意体上的矩阵方程组$[X_{nn}A_{ns}, X_{nn}B_{nt}]$

$=[A_{ns},O]$,数学研究,29:1(1996),106～108.
[133] 王卿文,薛有才,一个四元数矩阵方程组的半正定解,山东师大学报(自),10:3(1995),58～59.
[134] 王卿文,一四元数矩阵方程组的实部半正定解,纯粹数学与应用数学,待发表.
[135] 谢邦杰,抽象代数,上海:上海科学技术出版社,1988.
[136] 李乔,矩阵论八讲,上海:上海科学技术出版社,1988.
[137] 王国荣,矩阵与算子广义逆,北京:科学出版社,1994.
[138] Horn R. A., Johnson C. R., *Matrix Analysis*, Cambribge: Cambridge University Press, 1985.
[139] Horn R. A., Johnson C. R., *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
[140] Jacobson N., *Lectures in Abstract Algebra* Ⅱ, Springer—Verlag, New York, 1953.
[141] McDonald B. R., *Linear Algebra over Commutative Rings*, Marcel Dekker Inc. 1984.
[142] Pierce R. S., *Associative Algebras*, Springer — Verlag, New York, 1982.
[143] Draxl P. K., *Skew Fields*, Cambridge: Cambridge university Press, 1983.
[144] Brown W. C., *Matrices over commutative rings*, Marcel Dekker Inc., New York, 1993.
[145] 熊金淹,环论,武汉大学出版社,1993.
[146] 陈公宁,矩阵理论与应用,北京:高等教育出版社,1990.

后　　记

矩阵方程是线性代数中一个非常有活力的课题。我们在众多先生的鼓励和支持下，出版了这本《线性代数研究——体与环上的矩阵方程》，权作我们学习、研究矩阵方程的一个总结。

在本书成书过程中，山东省代数学会理事长、山东师大李师正教授主审了全部书稿，得到了中国大百科全书出版社戴中器先生和知识出版社翟德芳先生的大力支持，新闻出版报社郝振省先生为本书的出版做了大量的工作，运城高专艺术系马美萍女士为本书设计了封面。在此我们谨向众位先生、女士表示诚挚的尊敬和感激之情。

本书第一、二章由薛有才同志执笔，第三、四章由王卿文同志执笔。

作者

1996.8